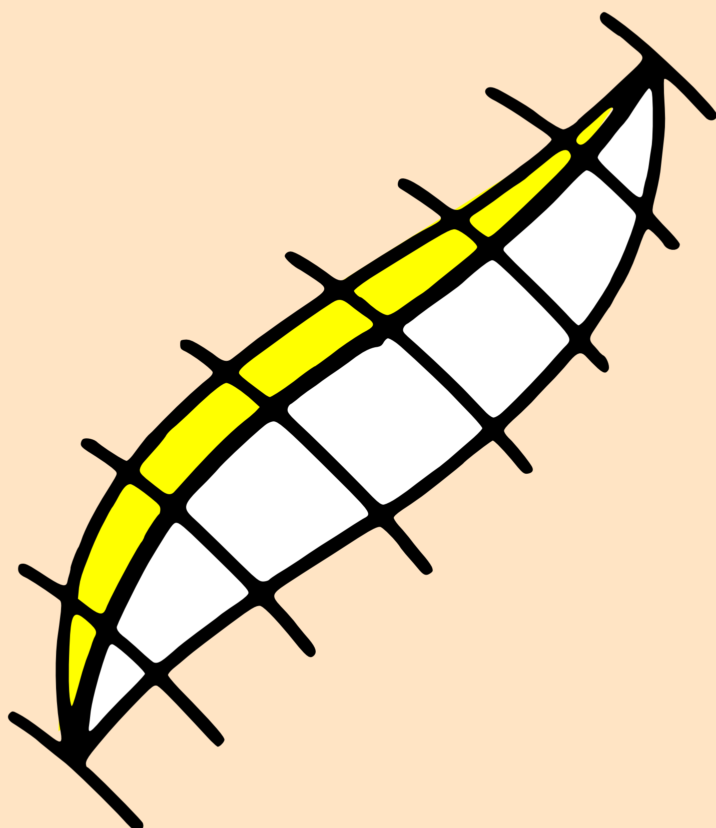
N. Tchétaev

MÉCANIQUE RATIONNELLE



Éditions Mir Moscou

Н.Г. ЧЕТАЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

N. TCHÉTAEV

MÉCANIQUE RATIONNELLE



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe par
SERGUEI MEDVÉDEV

Imprimé en Russie

ISBN 5-03-002950-8

AVANT-PROPOS

Ce cours de Mécanique Rationnelle a été conçu pour les étudiants des Universités de Kazan' et de Moscou. La conception de ce cours a été marquée par les idées des professeurs D. Seiliger et V. Steklov qui m'ont prodigué leurs conseils et m'ont inculqué la maxime « Mieux vaut moins mais de meilleure qualité ».

Les cours de Mécanique Rationnelle existent depuis longtemps. On les doit à Lagrange, Euler, Poinsot et Joukovski. Il m'a donc semblé raisonnable de répéter certains développements qui ont été élaborés par ces savants et qui me paraissaient excellents, plutôt que de rechercher à tout prix l'originalité en sacrifiant ce qui a été bien fait par quelqu'un d'autre.

Je me suis efforcé de rendre clair l'exposé des problèmes de Mécanique Rationnelle. En cinématique j'ai pris soin d'éviter l'emploi des coordonnées obliques et curvilignes puisqu'on établit facilement les équations de la dynamique en coordonnées curvilignes à l'aide des équations de Lagrange.

Aux équations de Lagrange qui sont insensibles aux coordonnées covariantes et contravariantes sont liés, selon Cartan, les éléments de l'analyse tensorielle.

L'auteur

CHAPITRE PREMIER

FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES VECTEURS

§ 1. Les vecteurs. Vecteurs libres

1. Un vecteur **F** est un segment de droite AB (fig. 1) possédant une *origine A* et une *extrémité B*. La longueur du segment AB est appelée *module* ou *longueur* du vecteur $\overline{AB}$ que l'on désigne par $|\overline{AB}|$. L'origine A est appelée aussi *point d'application* du vecteur $\overline{AB}$. La droite qui porte le vecteur est appelée *ligne d'action du vecteur*. La ligne d'action définit la *direction du vecteur*. Le sens du vecteur $\overline{AB}$ est indiqué par une flèche marquée à l'extrémité B.

En mécanique, on utilise les vecteurs libres, les vecteurs glissants et les vecteurs fixes. Un *vecteur libre* est défini par la direction de la ligne d'action, par son module et son sens, son origine étant arbitraire. Un *vecteur glissant* est défini par la direction de sa ligne d'action, par son module et par son sens ; son origine peut glisser librement le long de la ligne d'action. Un *vecteur fixe* ou *appliqué* est défini par son point d'application, par sa ligne d'action, par son module et son sens.

2. Deux vecteurs libres sont dits *égaux* s'ils présentent la même direction, le même module et le même sens.

Le point d'application des vecteurs libres peut être choisi arbitrairement. Convenons de choisir, pour point d'application des vecteurs libres, l'origine des coordonnées, à moins que le point d'application ne soit spécifié.

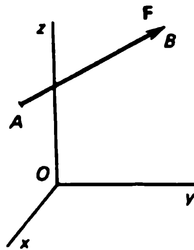


Fig. 1

Lorsque le point d'application d'un vecteur libre **F** vient à varier, ses projections X, Y, Z sur les axes d'un système de coordonnées rectangulaires restent invariantes, les valeurs de ces projections définissant complètement un vecteur libre.

Le module d'un vecteur s'exprime en fonction de ses projections par la formule

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

La *direction* et le *sens du vecteur* **F** sont définis par ses *cosinus directeurs*

$$\alpha = \frac{X}{F}, \quad \beta = \frac{Y}{F}, \quad \gamma = \frac{Z}{F},$$

où α, β et γ désignent les cosinus des angles que fait la ligne d'action du vecteur **F** avec les directions positives des axes de coordonnées x, y, z.

3. Multiplier un vecteur libre **F** par un nombre positif m revient à construire un vecteur $m\mathbf{F}$ de même sens dont le module est égal à $m|\mathbf{F}|$. Multiplier un vecteur **F** par un nombre négatif $-m$ revient à construire un vecteur $-m\mathbf{F}$ de module $m|\mathbf{F}|$ mais de sens opposé.

4. **Composition des vecteurs.** On appelle somme de deux vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ le vecteur **F** représentant la diagonale du parallélogramme construit avec les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ issus d'une origine commune O (fig. 2) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Dans les cas limites où les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ ayant le même point d'application O appartiennent à une même droite et le parallélogramme résultant se réduit à une droite, la somme $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ correspond à un vecteur dont le module est $|\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2|$ et orienté dans le même sens que les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ lorsque ces derniers sont orientés dans le même sens, ou à un vecteur ayant pour module $||\mathbf{F}_1| - |\mathbf{F}_2||$ et orienté dans le sens du plus grand des deux vecteurs lorsque ceux-ci sont orientés en sens opposés.

Par définition, la somme de deux vecteurs jouit de la propriété de commutativité :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1.$$

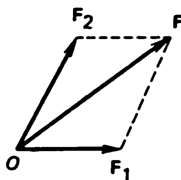


Fig. 2

La projection sur un axe quelconque de la somme de deux vecteurs est égale à la somme des projections de ces vecteurs sur ce même axe :

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad Z = Z_1 + Z_2.$$

Si la somme de deux vecteurs libres est égale à zéro : $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, le vecteur $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ possède le même module que le vecteur $\mathbf{F}_1$ mais son sens en est opposé.

De la règle de composition des vecteurs libres découle la règle du polygône. Etant donné plusieurs vecteurs libres $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, leur somme $\mathbf{F}$ doit être construite de la façon suivante. Prenons pour origine un point O arbitraire et construisons le polygône $OO_1O_2 \ldots O_n$ dont les côtés consécutifs $\overline{O_{k-1}O_k}$ sont équipollents aux vecteurs donnés :

$$\overline{O_{k-1}O_k} = \mathbf{F}_k.$$

Le vecteur libre $\mathbf{F} = \overline{OO_n}$ qui ferme le polygône est la *somme géométrique* des vecteurs :

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k.$$

5. Produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs libres $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ est le nombre qui est égal au produit des modules des vecteurs par le cosinus de l'angle que font entre elles les directions positives de ces vecteurs (fig. 3) :

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = |\mathbf{F}_1|\cdot|\mathbf{F}_2| \cos\theta.$$

Mais comme

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2| \cos\theta,$$

on a

$$|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2| \cos\theta = \frac{1}{2}\{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]\}.$$

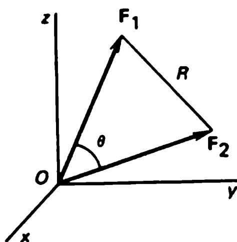


Fig. 3

Par conséquent

$$(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{1.1}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs se ramène au produit algébrique des projections correspondantes de ces vecteurs et à l'addition de ces produits. En conséquence, le produit scalaire est commutatif et distributif :

$$(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2,\ \mathbf{F}_1),$$
$$(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = (\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2) + (\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_3).$$

Si les vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire est égal à zéro.

6. Produit vectoriel. Etant donné deux vecteurs libres $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ (fig. 4), appliqués à un même point O, leur produit vectoriel $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ est un vecteur libre dont le module est donné par l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, qui est orienté suivant la normale au plan du parallélogramme dans un sens tel que pour superposer $\mathbf{F}_1$ à $\mathbf{F}_2$ on doit le faire tourner dans le sens positif. Dans le cas d'un système de coordonnées direct, le sens de rotation positif est antihoraire.

Cherchons les projections L, M, N du vecteur

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$$

respectivement sur les axes x, y, z d'un système de coordonnées rectangulaires. La projection sur l'axe z est

$$N = |\mathbf{Q}| \cos\theta = 2\Pi \cos\theta,$$

Π étant l'aire du triangle construit avec les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ (fig. 5) ; l'angle que fait le plan du triangle avec le plan Oxy est égal à l'angle θ entre les normales à ces plans. Notons $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$ les composantes orthogonales des vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, qui sont parallèles au plan de coordonnées Oxy. Notons Σ l'aire du triangle construit avec les vecteurs $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$. Comme l'aire Σ est

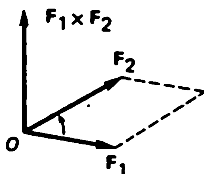


Fig. 4

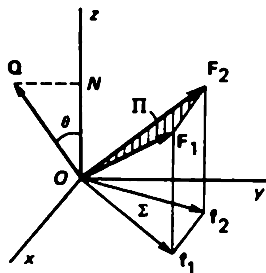


Fig. 5

égale à la projection de l'aire Π sur le plan Oxy, on aura

$$\Sigma = \Pi \cos \theta.$$

Or

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

par conséquent

$$N = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = X_1 Y_2 - Y_1 X_2.$$

On en déduit les autres projections par permutation cyclique :

$$L = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad M = Z_1 X_2 - X_1 Z_2.$$

En notant **i**, **j**, **k** les vecteurs unitaires des axes de coordonnées on peut contracter les trois formules ci-dessus en une seule :

$$\mathbf{Q} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

On remarque que les projections du produit $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ sur les axes rectangulaires sont respectivement égales aux déterminants déduits de la matrice

$$\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{Vmatrix}.$$

Le produit vectoriel change de signe lorsqu'on permute les termes :

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 = -(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_1),$$

et jouit de la propriété distributive :

$$\mathbf{F}_1 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_3.$$

§ 2. Les vecteurs glissants*)

7. Par définition on peut déplacer un vecteur glissant le long de sa ligne d'action sans que son module ni son sens ne soient modifiés.

---

*) L'algèbre des vecteurs glissants a été exposée par le professeur A. Kotelnikov de l'Université de Kazan' in « Calcul hélicoïdal et ses applications en géométrie et en mécanique » (Kazan', 1895). La théorie des vecteurs glissants a été élaborée par Poinsot. Comme nous aurons à utiliser l'algèbre des vecteurs libres, il faudra veiller à préciser la nature des vecteurs concernés.

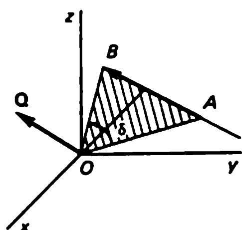


Fig. 6

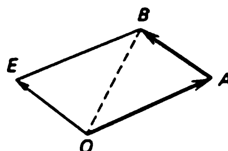


Fig. 7

Lorsque le vecteur **F** glisse le long de la ligne d'action, ses projections orthogonales X, Y, Z sur les axes de coordonnées rectangulaires restent invariantes.

Lorsque le vecteur $\mathbf{F} = \overline{AB}$ (fig. 6) glisse le long de la ligne d'action, outre les projections X, Y, Z, seront invariants : le plan contenant le point fixe O et le vecteur glissant **F** ; l'aire du triangle OAB construit sur le point O, l'origine A et l'extrémité B du vecteur glissant $\overline{AB}$; le sens de rotation par rapport au point O d'un déplacement effectué dans le sens du vecteur glissant.

Tous ces invariants peuvent être inclus dans un seul vecteur **Q** ayant le point O pour origine, porté par une droite orthogonale au plan du triangle OAB, orienté dans un sens tel que le déplacement de A vers B apparaît antihoraire et dont le module est égal au double de l'aire du triangle OAB

$$2 \text{ aires } \Delta OAB = \delta \cdot |\overline{AB}|,$$

δ étant la distance entre le point O et la ligne d'action du vecteur $\overline{AB}$; δ est le *bras* du vecteur glissant AB par rapport au point O. Le vecteur **Q**, dont les propriétés seront décrites dans ce qui suit, est appelé *moment du vecteur* $\overline{AB}$ *par rapport au point* O.

Complétons le triangle OAB jusqu'au parallélogramme $OABE$ (fig. 7). La figure 7 laisse apparaître que le moment du vecteur $\overline{AB}$ par rapport au point O est appliqué au point O et est égal à

$$\mathbf{Q} = \overline{OA} \times \overline{OE}. \tag{1.3}$$

Cette formule définit un vecteur sans préciser sa nature. Le vecteur $\overline{OE}$ est égal en module au vecteur $\overline{AB}$, coïncide en direction et en sens avec ce dernier mais a le point O pour point d'application.

En désignant par x, y, z les projections du vecteur $\overline{OA}$ ou les coordonnées du point A, et par X, Y, Z les projections du vecteur $\overline{AB}$, l'application de la formule (1.2) du produit vectoriel de deux vecteurs laisse apparaître

qu'en vertu de (1.3) le moment du vecteur glissant $AB(X, Y, Z)$ appliqué au point $A(x, y, z)$, qui est rapporté à l'origine O des coordonnées, est donné par

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Notons L, M, N les projections du moment $\mathbf{Q}$ sur les axes de coordonnées ; L, M, N sont également appelés moments du vecteur glissant $\overline{AB}$ par rapport aux axes x, y, z

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX.$$

Comme le moment $\mathbf{Q}$ est orthogonal à la direction du vecteur $\overline{AB}$, on a

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Il s'ensuit que des six quantités X, Y, Z, L, M, N ne variant pas lorsque le vecteur $\overline{AB}$ glisse le long de la ligne d'action, ne sont indépendantes que cinq. Connaissant ces cinq quantités indépendantes on peut construire le vecteur glissant $\overline{AB}$.

8. Somme de vecteurs glissants de même origine. Deux vecteurs glissants $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ dont les lignes d'action se coupent au point A peuvent être déplacés par glissement en une position où ils posséderont la même origine A. Deux vecteurs glissants $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ ayant une origine commune au point A s'additionnent selon la règle du parallélogramme. Leur somme est donc le vecteur glissant $\mathbf{F}$ appliqué au point A, qui est la diagonale du parallélogramme construit avec les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Les cas limites de la règle du parallélogramme doivent être conformes à la définition. Si les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont portés par une même droite et sont orientés dans le même sens, leur somme sera le vecteur glissant $\mathbf{F}$ de même sens porté par la même ligne d'action et ayant pour module la somme des modules $|\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2|$. Si les vecteurs glissants $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont portés par la même droite et sont orientés en sens opposés, le module $|\mathbf{F}_1|$ étant plus grand que le module $|\mathbf{F}_2|$, leur somme sera égale au vecteur $\mathbf{F}$ porté par la même ligne d'action, orienté dans le sens du plus grand vecteur $\mathbf{F}_1$ et ayant pour module la différence $|\mathbf{F}_1| - |\mathbf{F}_2|$.

Si deux vecteurs glissants $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont portés par la même droite, si leurs modules sont égaux et s'ils sont orientés en sens opposés, on aura

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0.$$

La somme de deux vecteurs glissants peut être nulle si et seulement s'ils sont portés par la même droite, si leurs modules sont égaux et s'ils sont orientés en sens opposés.

Considérons deux vecteurs glissants $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ appliqués à un même point A. Leur somme est le vecteur glissant

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

appliqué au même point A.

Le moment de la somme par rapport à l'origine des coordonnées O est égal à

$$\mathbf{Q} = \overline{OA} \times \mathbf{F} = \overline{OA} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \overline{OA} \times \mathbf{F}_1 + \overline{OA} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2.$$

Ainsi se trouve démontré le *théorème de Varignon* : le moment de la somme de vecteurs glissants qui se coupent est égal à la somme des moments de ces vecteurs.

9. Equivalence. Deux systèmes de vecteurs glissants sont dits *équivalents* lorsqu'on peut passer d'un système à l'autre au moyen d'opérations simples : 1) par glissement des vecteurs le long de leurs lignes d'action, 2) en faisant la somme des vecteurs glissants qui se coupent, 3) en ajoutant (ou en soustrayant) deux vecteurs glissants de même module, portés par la même droite mais de sens différents.

10. Composition de vecteurs glissants parallèles. Considérons deux vecteurs glissants parallèles et de même sens $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ appliqués respectivement aux points O_1 et O_2 (fig. 8). Additionnons les vecteurs glissants $\mathbf{a}$ et $-\mathbf{a}$ portés par la droite O_1O_2 et appliqués respectivement aux points O_1 et O_2. Faisons la somme de ces paires de vecteurs

$$-\mathbf{a} + \mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{a} + \mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_2.$$

Supposons que les vecteurs glissants $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ se coupent au point A ; on peut alors en faire la somme, ce qui fournit le vecteur résultant

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

Le vecteur glissant $\mathbf{F}$ est parallèle aux vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, a pour point d'application le point A et ils ont tous le même sens ; le module du vecteur $\mathbf{F}$ est égal à la somme des modules $|\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2|$.

Le vecteur résultant $\mathbf{F}$ coupe le segment O_1O_2 au point O qui divise le segment O_1O_2 en parties inversement proportionnelles aux modules des vecteurs appliqués. De la similitude des triangles on a

$$\frac{AO}{OO_1} = \frac{|\mathbf{F}_1|}{|-\mathbf{a}|}, \quad \frac{AO}{O_2O} = \frac{|\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{a}|},$$

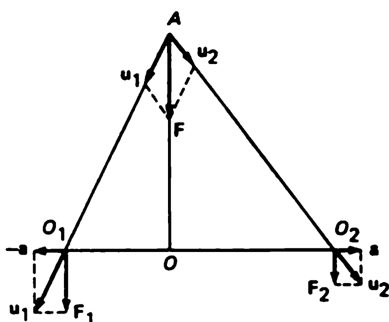


Fig. 8

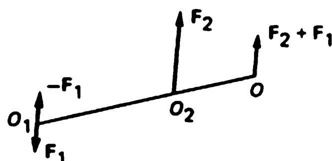


Fig. 9

d'où

$$\frac{O_1O}{OO_2} = \frac{|\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_1|} .$$

Considérons maintenant l'addition de vecteurs parallèles, de sens opposés et de modules différents. Soient $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ des vecteurs glissants, parallèles, orientés en sens opposés et appliqués aux points O_1 et O_2 (fig. 9). Décomposons le plus grand des vecteurs $\mathbf{F}_2$ en deux vecteurs glissants orientés dans le même sens que $\mathbf{F}_2$. Choisissons l'un de ces vecteurs tel qu'il passe par le point O_1 et qu'il soit égal à $-\mathbf{F}_1$; l'autre vecteur $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1$ de module $|\mathbf{F}_2| - |\mathbf{F}_1|$ et orienté dans le sens du plus grand vecteur $\mathbf{F}_2$ passera par un point O dont la position vérifie la relation

$$\frac{O_1O_2}{O_2O} = \frac{|\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_1|} ,$$

soit

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{|\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_1|} .$$

Les vecteurs $-\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_1$ appliqués au point O_1 s'éliminent mutuellement. On obtient finalement un seul vecteur glissant $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1$ appliqué au point O qui divise de façon extérieure le segment O_1O_2 en parties inversement proportionnelles aux vecteurs qui ont été donnés.

§ 3. Théorie des couples de vecteurs glissants

11. Couple de vecteurs glissants. Un couple est un système de deux vecteurs glissants de même module, parallèles, orientés en sens contraires et portés par des droites différentes.

Notons **F** et $-$**F** les vecteurs glissants du couple, le vecteur **F** a pour origine le point A et le vecteur $-$**F** a pour origine le point B (fig. 10). Le plan contenant les vecteurs du couple est appelé *plan du couple*. La distance h entre les lignes d'action des vecteurs du couple est appelée *bras du couple*.

Le vecteur **m**, dont nous placerons l'origine au point B, orthogonal au plan du couple, orienté vers un point d'où la rotation des vecteurs du couple serait antihoraire, de module $m = F \cdot h$, qui est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs du couple, est appelé *moment du couple*. Il nous reste à établir la nature de ce vecteur. Par construction

$$\mathbf{m} = \overline{BA} \times \mathbf{F}. \qquad (1.5)$$

12. *On peut faire tourner les couples de vecteurs dans le plan qui les contient.* Soit un couple de vecteurs glissants **F** et $-$**F** de bras h (fig. 11). Considérons un segment arbitraire $CD = AB = h$ contenu dans le plan du couple. Nous allons démontrer que l'on peut transformer ce couple en un couple équivalent de bras CD.

Menons la ligne d'action du vecteur **F** et une droite orthogonale au segment CD et passant par le point C ; notons P le point d'intersection de ces droites. Menons la ligne d'action du vecteur $-$**F** et une droite passant par le point D et orthogonale au segment CD ; notons S le point d'intersection de ces droites. Les points d'intersection de ces quatre droites définissent un losange dont les sommets opposés sont les points P et S.

Appliquons au point P deux vecteurs glissants **u** et $-$**u**, en module égaux à $|\mathbf{F}|$, orientés en sens opposés et portés par la ligne PC. Appliquons au point S deux vecteurs glissants **u** et $-$**u** orientés en sens inverses et portés par la ligne SD. Faisons la somme des vecteurs **F** et $-$**u** appliqués au point P :

$$\mathbf{R} = -\mathbf{u} + \mathbf{F}.$$

Faisons encore la somme des vecteurs glissants $-$**F** et **u** appliqués au point S :

$$\mathbf{R}' = -\mathbf{F} + \mathbf{u}.$$

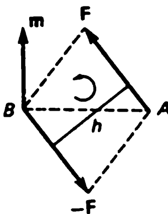


Fig. 10

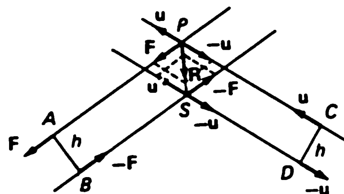


Fig. 11

Comme les points P et S sont les sommets du losange construit et les vecteurs additionnés sont égaux en module et portés par les côtés de ce losange, leurs résultantes $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$ sont portées par la diagonale PS du losange, orientées en sens opposés et égales en modules ; la somme de ces résultantes est nulle :

$$\mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0.$$

Déplaçons les autres vecteurs glissants $\mathbf{u}(P)$ et $-\mathbf{u}(S)$ le long de leurs lignes d'action respectivement aux points C et D. Le problème est résolu puisque le moment du couple résultant est évidemment égal et parallèle au moment du couple initial et possède la même orientation que ce dernier.

13. *On peut faire varier le bras du couple* en faisant varier simultanément les vecteurs formant ce couple. Soit un couple de vecteurs glissants $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$ de bras AB (fig. 12). Notons O le milieu du segment AB. Prenons un segment arbitraire CD, qui constituera le nouveau bras du couple modifié, et plaçons-le sur la ligne AB de telle manière que son milieu coïncide avec le point O. Appliquons aux points C et D les vecteurs glissants $\mathbf{u}$ et $-\mathbf{u}$ parallèlement aux vecteurs du couple initial. Le module du vecteur $\mathbf{u}$ est donné par la formule

$$\mathbf{F} \cdot AB = \mathbf{u} \cdot CD. \tag{1.6}$$

Faisons la somme du vecteur $\mathbf{F}$ appliqué au point A et du vecteur $\mathbf{u}$ appliqué au point D ; leur somme $\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{u}$ est un vecteur glissant passant par O, car le point O partage le segment AD en raison inverse des vecteurs composés en vertu de (1.6)

$$\frac{OD}{AO} = \frac{CD}{AB} = \frac{F}{u}.$$

La résultante du vecteur glissant $-\mathbf{u}$ appliqué en C et du vecteur $-\mathbf{F}$ appliqué en B est le vecteur glissant $-\mathbf{R}$ appliqué au point O. Les vecteurs $\mathbf{R}$ et $-\mathbf{R}$ appliqués au point O se détruisent mutuellement ; ne subsiste que le couple de vecteurs glissants $\mathbf{u}$ et $-\mathbf{u}$ appliqués respectivement aux points

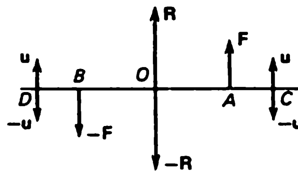


Fig. 12

C et D dont le bras possède la longueur CD imposée ; ce nouveau couple est équivalent au couple initial. En vertu de (1.6) le moment du couple résultant est égal et parallèle au moment du couple initial ; ces deux moments sont orientés pareillement.

14. *On peut effectuer la translation d'un couple.* Soit un couple de vecteurs glissants $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$ de bras AB (fig. 13), contenu dans le plan π. Il s'agit d'effectuer la translation de ce couple dans un plan π' parallèle au plan π. Effectuons la translation du segment AB dans le plan π' où il occupera la position $A'B'$. Appliquons aux points A' et B' les vecteurs glissants $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$. Le vecteur $\mathbf{F}$ appliqué en A et le vecteur $\mathbf{F}$ appliqué en B' donnent en somme le vecteur glissant $\mathbf{R} = 2\mathbf{F}$, appliqué au point O situé au milieu du segment AB'. La somme du vecteur $-\mathbf{F}$ appliqué au point B et du vecteur $-\mathbf{F}$ appliqué au point A' est le vecteur glissant $-\mathbf{R} = -2\mathbf{F}$ appliqué au point O situé au milieu du segment $A'B$. Les vecteurs glissants $\mathbf{R}$ et $-\mathbf{R}$ étant égaux, de sens contraires et portés par la même droite, se détruisent. Ne subsistent que deux vecteurs glissants $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$ appliqués respectivement aux points A' et B' et formant un couple dont le moment est égal et parallèle au moment du couple donné.

Il s'ensuit aussitôt que *deux couples de moments égaux et identiquement orientés sont équivalents.* Cette proposition permet de représenter un couple de vecteurs glissants par le moment du couple, de remplacer, dans les raisonnements, le couple par son moment et de traiter ce dernier comme un vecteur libre.

15. Composition des couples. Soient deux couples définis respectivement par les moments $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ (fig. 14). Considérons un point O et construisons les vecteurs libres $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ en prenant O pour origine. Posons que la droite OA est située à l'intersection des plans orthogonaux aux moments $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ et passant par le point O. En prenant le segment OA

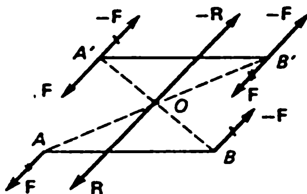


Fig. 13

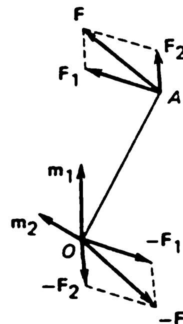


Fig. 14

pour bras de levier construisons les couples de vecteurs glissants ($\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_1$) et ($\mathbf{F}_2$, $-\mathbf{F}_2$) de moments $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$, équivalents aux couples donnés. Comme les vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ se coupent au point A, on peut en faire la somme $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ et obtenir le vecteur glissant $\mathbf{F}$ appliqué au point A. Si on fait la somme des vecteurs glissants $-\mathbf{F}_1$ et $-\mathbf{F}_2$ appliqués en O, on obtient le vecteur glissant $-\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ appliqué en O. On obtient finalement un couple de vecteurs glissants $\mathbf{F}$ et $-\mathbf{F}$ appliqués respectivement aux points A et O ; le moment de ce couple est égal, en vertu du théorème de Varignon, à :

$$m = \overline{OA} \times \mathbf{F} = \overline{OA} \times \mathbf{F}_1 + \overline{OA} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2.$$

Le moment d'une somme de couples est égal à la somme de leurs moments.

§ 4. Systèmes de vecteurs glissants

16. Vecteur résultant et couple résultant. Soient $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ des vecteurs glissants appliqués respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et soit O l'origine des coordonnées (fig. 15). Associons à ce système le vecteur glissant $\mathbf{F}_i$ d'origine O égal en module et de même sens que le vecteur $\mathbf{F}_i$ donné, ainsi qu'un vecteur $-\mathbf{F}_i$ de même module mais de sens opposé*). Le vecteur $\mathbf{F}_i$ appliqué en A_i et le vecteur $-\mathbf{F}_i$ appliqué en O forment un couple de moment

$$\mathbf{Q}_i = \overline{OA_i} \times \mathbf{F}_i.$$

Plaçons au point O l'origine du vecteur libre $\mathbf{Q}_i$; le moment $\mathbf{Q}_i$ du couple est égal au moment du vecteur glissant $\mathbf{F}_i$ appliqué en A_i par rapport à l'origine des coordonnées O.

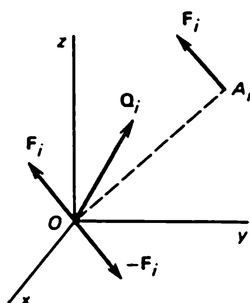


Fig. 15

*) L'utilisation de la même notation des vecteurs ne donnera lieu à aucun malentendu.

2*

Si on effectue la même construction pour chacun des vecteurs glissants donnés ($i = 1, 2, \ldots, n$), on obtiendra au point O un faisceau de vecteurs glissants $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ et un faisceau de moments de couples $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, ..., $\mathbf{Q}_n$, qui, ayant tous une origine commune, peuvent être sommés et fournir un vecteur glissant résultant

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

et le moment du couple résultant

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \ldots + \mathbf{Q}_n.$$

En résumé, *un système arbitraire de vecteurs glissants peut être réduit à un système équivalent formé d'un vecteur glissant résultant appliqué en O et d'un couple résultant dont le moment est égal à la somme des moments de tous les vecteurs glissants donnés par rapport à l'origine des coordonnées.*

17. Condition d'équivalence. Etant donné que les opérations élémentaires sont inversibles, deux systèmes de vecteurs glissants S et S' sont équivalents si, étant ramenés à l'origine des coordonnées O, leurs vecteurs résultants $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ et les moments $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}'$ des couples résultants sont égaux :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}', \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}'.$$

Si le vecteur résultant et le moment du couple résultant sont nuls :

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{Q} = 0,$$

le système est équivalent à zéro.

18. Changement du point de réduction. Posons que par réduction d'un système de vecteurs glissants à l'origine des coordonnées O on obtient un vecteur glissant résultant $\mathbf{F}$ (dont les projections sur les axes sont X, Y, Z) et un moment $\mathbf{Q}(L, M, N)$ du couple résultant (fig. 16). Pour ramener le système à une autre origine O', appliquons en O' deux vecteurs glissants

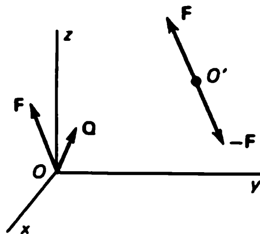


Fig. 16

F et $-\mathbf{F}$. Le vecteur **F** appliqué en O et le vecteur $-\mathbf{F}$ appliqué en O' forment un couple de moment

$$-(\overline{OO'} \times \mathbf{F}).$$

Ainsi, à la suite du passage à un nouveau point O', le système se réduit à un vecteur glissant **F** appliqué en O' et à un couple résultant de moment

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} - \overline{OO'} \times \mathbf{F} \tag{1.7}$$

égal à la somme du moment **Q** et du moment $-(\overline{OO'} \times \mathbf{F})$ provenant du transport du vecteur **F** au point O'. Les moments sont des vecteurs libres et nous pouvons les transporter en O'.

Les projections L', M', N' du moment résultant $\mathbf{Q}'$ s'expriment selon (7) par les formules suivantes :

$$L' = L - (yZ - zY), \quad M' = M - (zX - xZ), \quad N' = N - (xY - yX), \tag{1.8}$$

x, y, z étant les coordonnées du point O'.

19. Hélice. Lorsqu'on modifie le point de réduction d'un système de vecteurs, le module et le sens du vecteur résultant **F** ainsi que ces projections et le produit scalaire

$$(\mathbf{F}, \mathbf{Q}) = (\mathbf{F}', \mathbf{Q}')$$

sont des invariants. Cela implique que lorsqu'on modifie le point de réduction, la projection du moment du couple résultant sur le support du vecteur résultant ne change pas. Le moment du couple résultant ne varie lors du déplacement du point de réduction que si **F** est différent de zéro. Mais si le vecteur résultant est nul, le moment du couple résultant sera le même **Q** lorsqu'on réduit le système à n'importe quel point de l'espace. Le système se réduit alors à un seul couple de moment **Q**.

Si **F** est différent de zéro, le lieu géométrique des points O', où le vecteur résultant **F** et le moment $\mathbf{Q}'$ du couple résultant sont colinéaires, se laisse déterminer, en vertu de (1.8), à partir de la condition du parallélisme des vecteurs **F** et $\mathbf{Q}'$, par les équations

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z}. \tag{1.9}$$

La combinaison du vecteur résultant **F** et du moment du couple résultant **Q**, dirigé suivant la ligne d'action de **F** et relatif au point O' de cette ligne, porte le nom d'*hélice* ; la ligne d'action est alors appelée *axe de l'hélice* ou *axe central.*

20. Construction géométrique. Soient **F** et **Q** le vecteur résultant et le moment du couple résultant dans le cas où le système est rapporté à l'ori-

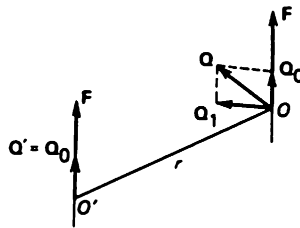


Fig. 17

gine O (fig. 17). Pour effectuer la construction géométrique de l'hélice, décomposons le moment $\mathbf{Q}$ en une composante $\mathbf{Q}_0$ dirigée le long de la ligne d'action du vecteur $\mathbf{F}$ et en une composante $\mathbf{Q}_1$ orthogonale à $\mathbf{F}$: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$. Cherchons sur la perpendiculaire au plan défini par les vecteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{Q}$ un point O' de l'hélice, i.e. un point tel que

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} - \overline{OO'} \times \mathbf{F} = \mathbf{Q}_0.$$

En multipliant cette égalité vectoriellement à gauche par $\mathbf{F}$ et en utilisant la condition $(\mathbf{F}, \overline{OO'}) = 0$ que les directions de $\mathbf{F}$ et de $\overline{OO'}$ soient rectangulaires, ainsi que la condition $\mathbf{F} \times \mathbf{Q}_0 = 0$ que les directions de $\mathbf{F}$ et de $\mathbf{Q}_0$ soient parallèles, il vient

$$\overline{OO'} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{Q}}{F^2}.$$

Cette formule définit complètement la position du point O' sur l'axe de l'hélice. La ligne parallèle à $\mathbf{F}$ et passant par O' est l'axe de l'hélice. L'hélice se compose du vecteur glissant $\mathbf{F}$ et du moment libre $\mathbf{Q}'$ du couple résultant, appliqués tous deux au point O'.

Le moment du couple résultant possède sa plus petite valeur pour les points de l'axe de l'hélice :

$$|\mathbf{Q}_0| < |\mathbf{Q}|.$$

L'hélice sera dénuée de moment du couple résultant : $\mathbf{Q}_0 = 0$, si pour $\mathbf{F}$ différent de zéro l'invariant $\mathbf{F} \times \mathbf{Q} = 0$. Dans ce cas, le système se réduit à un vecteur résultant $\mathbf{F}$ porté par l'axe de l'hélice. On dit alors que le système admet une résultante. L'équation de l'axe de l'hélice (1.9) ou de la ligne d'action de la résultante dégénère en un système d'équations compatibles $L' = 0$, $M' = 0$, $N' = 0$, ou

$$L - (yZ - zY) = 0, \quad M - (zX - xZ) = 0, \quad N - (xY - yX) = 0. \quad (1.10)$$

21. Révision des cas envisageables. En rassemblant tous les cas considérés plus haut on peut les résumer de la façon suivante :

1° $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{Q} = 0$, le système est équivalent à zéro.

2° $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{Q} \neq 0$, le système se réduit à un couple de moment $\mathbf{Q}$.

3° $\mathbf{F} \neq 0$, $(\mathbf{F}, \mathbf{Q}) \neq 0$, le système se réduit à une hélice.

4° $\mathbf{F} \neq 0$, $(\mathbf{F}, \mathbf{Q}) = 0$, le système se réduit à une résultante portée par l'axe de l'hélice.

22. Vecteurs parallèles. Si tous les vecteurs glissants d'un système sont parallèles, le vecteur résultant $\mathbf{F}$ sera parallèle à la direction commune ou sera nul. Les moments des différents vecteurs par rapport à l'origine O sont perpendiculaires à la direction commune des vecteurs parallèles ; de ce fait le moment résultant $\mathbf{Q}$ du système sera également perpendiculaire à cette direction. Par conséquent, si $\mathbf{F}$ est différent de zéro, les vecteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{Q}$ sont rectangulaires : $(\mathbf{F}, \mathbf{Q}) = 0$; le système admet alors une résultante appliquée en un point quelconque de l'axe de l'hélice. Si le vecteur résultant $\mathbf{F}$ était nul, le système se réduirait à un couple ou serait équivalent à zéro.

Soit α, β, γ les cosinus directeurs de la direction du système de vecteurs glissants $\mathbf{F}_\nu$ parallèles, dont les projections sur les axes de coordonnées sont X_ν, Y_ν, Z_ν (fig. 18). Notons P_ν la mesure algébrique du vecteur $\mathbf{F}_\nu$ en la

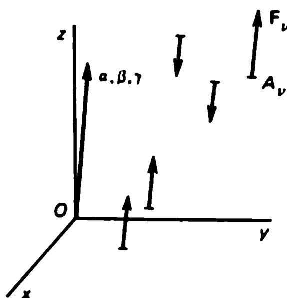


Fig. 18

posant positive si le vecteur $\mathbf{F}_\nu$ est orienté dans le sens de α, β, γ, et négative dans le cas contraire. On aura alors

$$X_\nu = P_\nu\alpha, \quad Y_\nu = P_\nu\beta, \quad Z_\nu = P_\nu\gamma.$$

En notant x_ν, y_ν, z_ν les coordonnées du point d'application du vecteur glissant $\mathbf{F}_\nu$, le moment de ce dernier par rapport à l'origine des coordonnées

sera donné par

$$\mathbf{Q}_\nu = \overline{OA_\nu} \times \mathbf{F}_\nu = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ P_\nu\alpha & P_\nu\beta & P_\nu\gamma \end{vmatrix}.$$

Les projections L_ν, M_ν, N_ν du moment $\mathbf{Q}_\nu$ sur les axes de coordonnées sont donc égales à

$$L_\nu = P_\nu(y_\nu\gamma - z_\nu\beta), \quad M_\nu = P_\nu(z_\nu\alpha - x_\nu\gamma), \quad N_\nu = P_\nu(x_\nu\beta - y_\nu\alpha).$$

Un système de vecteurs glissants parallèles se réduit, à l'origine des coordonnées O, au vecteur résultant $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_\nu$, dont les projections sont

$$X = \sum P_\nu\alpha, \quad Y = \sum P_\nu\beta, \quad Z = \sum P_\nu\gamma,$$

et au moment $\mathbf{Q} = \sum \mathbf{Q}_\nu$ du couple résultant dont les projections sont

$$L = \sum L_\nu, \quad M = \sum M_\nu, \quad N = \sum N_\nu.$$

Si le vecteur résultant est différent de zéro : $R = \sum P_\nu \neq 0$, il résulte de la relation évidente $XL + YM + ZN = 0$ que le système se réduira à un vecteur glissant résultant $\mathbf{F}$ porté par l'axe de l'hélice ou par l'axe central. Les équations de l'axe de l'hélice sont alors données par les formules (1.10)

$$\sum P_\nu(y_\nu\gamma - z_\nu\beta) - (yZ - zY) = 0.$$

Les deux autres équations analogues s'en déduisent par permutation cyclique des indices littéraux. On obtient ainsi l'équation de l'axe central

$$\frac{\sum P_\nu x_\nu - Rx}{\alpha} = \frac{\sum P_\nu y_\nu - Ry}{\beta} = \frac{\sum P_\nu z_\nu - Rz}{\gamma}. \tag{1.11}$$

Quelle que soit la direction de α, β, γ, l'axe central passe par le point x, y, z défini par les équations

$$Rx = \sum P_\nu x_\nu, \quad Ry = \sum P_\nu y_\nu, \quad Rz = \sum P_\nu z_\nu. \tag{1.12}$$

Il s'ensuit que si on fait tourner les vecteurs glissants en maintenant leur parallélisme, la ligne d'action de la résultante passera toujours par ce point déterminé x, y, z. C'est pour cette raison que ce point est appelé *centre des vecteurs parallèles*. Il est d'usage de considérer ce point dans un sens plus étroit, comme le point d'application de la résultante.

Si $R = 0$, le système de vecteurs glissants parallèles est équivalent à un couple de moment $\mathbf{Q}$.

§ 5. Vecteurs liés

23. Coordonnées d'un vecteur lié. Un vecteur **F** lié à son point d'application A est défini par ses projections X, Y, Z sur les axes de coordonnées et par les coordonnées x, y, z de son origine. Ces six quantités sont indépendantes et suffisantes pour définir complètement un vecteur lié.

Pour faire la somme des vecteurs liés à un même point on utilisera la règle du parallélogramme ou du polygone. Dans les problèmes de mécanique, les vecteurs libres, glissants et liés possèdent des mesures différentes et on doit donc faire bien attention.

24. Dérivée vectorielle. Soit **F** un vecteur issu de l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, dont les projections $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sur les axes de coordonnées sont des fonctions de t continues et dérivables. Si t prend un accroissement Δt, le vecteur **F** prendra dans le système de coordonnées $Oxyz$ un accroissement géométrique

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t).$$

Les projections de cet accroissement sur les axes des coordonnées $Oxyz$ seront notées ΔX, ΔY, ΔZ.

Si Δt tend vers zéro, le rapport $\Delta \mathbf{F}/\Delta t$ tendra dans le système $Oxyz$ vers un vecteur déterminé dont les projections sont dX/dt, dY/dt, dZ/dt.

Le vecteur limite est la *dérivée du vecteur* par rapport à t dans le système de coordonnées $Oxyz$; on le désigne par $d\mathbf{F}/dt$.

Les règles usuelles de *dérivation de la somme* et *du produit* s'appliquent également à la dérivation des sommes et des produits de vecteurs

$$\frac{d(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots)}{dt} = \frac{d\mathbf{F}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{F}_2}{dt} + \ldots,$$

$$\frac{d(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{F}_1}{dt} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \times \frac{d\mathbf{F}_2}{dt},$$

$$\frac{d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{F}_1}{dt}, \mathbf{F}_2\right) + \left(\mathbf{F}_1, \frac{d\mathbf{F}_2}{dt}\right).$$

Comme la définition de la dérivée d'un vecteur ne faisait intervenir que des projections, la construction de la dérivée s'effectue comme s'il s'agissait d'un vecteur libre dont l'origine est rapportée à un point fixe dans le système d'axes choisi. Selon la définition donnée plus haut, la notion de dérivée d'un vecteur est intimement liée au système de coordonnées considéré ; il faut donc que soit précisé (surtout si on utilise plusieurs référentiels) par rapport à quel référentiel est définie la dérivée : $(d\mathbf{F}/dt)_{Oxyz}$.

CHAPITRE II

CINÉMATIQUE

25. L'espace et le temps. On ne trouve dans la Nature ni un espace fixe, ni sa métrique ; on ne dispose non plus d'aucun mouvement uniforme qui permettrait de définir des intervalles de temps égaux. On se trouve donc obligé de déterminer l'espace et le temps, mais nous n'aborderons ce problème qu'après avoir acquis quelques connaissances en mécanique.

En mécanique classique, à une approximation acceptable, on admet que l'espace, par rapport auquel on considère les mouvements des systèmes mécaniques, est fixe et euclidien.

On adopte pour unité de temps absolu le jour solaire moyen.

§ 1. Cinématique du point matériel

26. Trajectoire du point matériel. Nous rapporterons le mouvement du point matériel à un système déterminé de coordonnées rectangulaires et rectilignes $Oxyz$ que nous conviendrons de considérer comme un repère immobile.

La courbe décrite par les positions successives du point mobile est appelée *trajectoire*. Le mouvement du point sera parfaitement déterminé si ses coordonnées x, y, z sont des fonctions continues et connues du temps t :

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t).$$

Ces équations déterminent la position du point mobile à tout instant t et représentent sous une forme paramétrique l'équation de la trajectoire. Si on choisit sur la trajectoire un point M_0, à partir duquel on mesurera la longueur s de la trajectoire parcourue par le point mobile M, le mouvement de M pourra être défini par la loi de variation de s en fonction du temps t : $s = s(t)$.

Dans ce qui suit on admettra que les fonctions φ_α, s sont continues et que leurs deux premières dérivées sont également continues.

27. Déplacement. Vitesse. Soient M et M' les positions que le point mobile occupe aux instants t et $t + \Delta t$ (fig. 19). Le vecteur $\overline{MM'}$ porte le

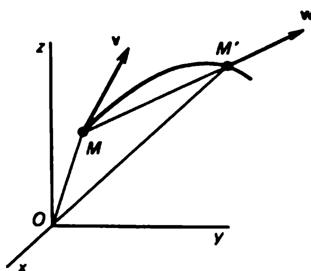


Fig. 19

nom de ***déplacement*** du point au cours de l'intervalle de temps Δt. Ce vecteur dont l'origine se trouve au point M représente la corde reliant les positions du point mobile aux instants t et $t + \Delta t$. Formons le rapport du déplacement $\overline{MM'}$ et de l'intervalle de temps Δt ; le vecteur défini par $\mathbf{w} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$ est la ***vitesse moyenne*** du point M pendant l'intervalle de temps Δt. La vitesse moyenne est un vecteur appliqué au point M et orienté dans le même sens que le déplacement $\overline{MM'}$.

La limite vers laquelle tend la vitesse moyenne, lorsqu'on fait tendre Δt vers zéro, est la ***vitesse*** du point M à l'instant t que l'on désigne par

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}.$$

A la limite, la direction de la corde MM' coïncide avec celle de la tangente à la trajectoire ; de ce fait la vitesse $\mathbf{v}$ du point M est un vecteur appliqué en M et dirigé suivant la tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement.

On peut déterminer la position du point M à l'aide du vecteur $\overline{OM}$ issu de l'origine des coordonnées (fig. 19). Le déplacement $\overline{MM'}$ au cours du temps Δt est égal à l'accroissement $\Delta\overline{OM}$ du vecteur $\overline{OM}$

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \Delta\overline{OM},$$

d'où

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overline{OM}}{dt}.$$

Il s'ensuit que *la vitesse d'un point mobile est égale à la dérivée par rapport au temps du rayon-vecteur du point mobile et constitue un vecteur appliqué à ce dernier.*

28. Projections de la vitesse sur les axes de coordonnées. Soient x, y, z les coordonnées du point M et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ celles du point M'. Les projections du déplacement $\overline{MM'}$ sur les axes de coordonnées $Oxyz$ sont respectivement égales à Δx, Δy, Δz ; les projections de la vitesse moyenne $\mathbf{w}$ sont égales à $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$. Il s'ensuit que les projections de la vitesse vraie $\mathbf{v}$ sur les axes de coordonnées $Oxyz$ seront données par les limites de ces expressions lorsque $\Delta t \to 0$, soit

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Théorème. *Les projections de la vitesse sur des axes de coordonnées rectangulaires sont égales aux dérivées premières par rapport au temps des coordonnées correspondantes du point mobile.*

Comme par hypothèse les axes du système $Oxyz$ sont rectangulaires, la valeur de la vitesse v s'exprime en fonction des projections par la formule

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

En notant s la longueur de l'arc de courbe de la trajectoire parcourue par le mobile depuis le point fixe M_0 (avec le signe convenable) on a

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

La valeur algébrique de la vitesse sera donnée par la formule

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Si v est positif, la vitesse est dirigée dans le sens des valeurs croissantes de s.

29. Mouvement curviligne uniforme. Le mouvement est dit *uniforme* si la valeur de la vitesse est constante. Dans ce cas

$$\frac{ds}{dt} = \text{const} = a.$$

Notons s_0 la valeur de s correspondant à l'instant initial $t = 0$; en intégrant l'équation précédente il vient

$$s = s_0 + at.$$

Il s'ensuit que dans le cas d'un mouvement uniforme le chemin parcouru est proportionnel au temps ; la valeur a de la vitesse est alors égale au chemin parcouru dans l'unité de temps en mouvement uniforme.

Un mouvement qui n'est pas uniforme est *varié*.

30. Théorème de la projection de la vitesse. Si le mouvement est rectiligne, on peut prendre l'axe x pour trajectoire. Dans ce cas $s = x$ et l'équation du mouvement est de la forme

$$x = f(t).$$

La valeur algébrique de la vitesse d'un point se déplaçant le long de l'axe x est donnée par la formule

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t).$$

Dans le cas où le mobile ponctuel M se meut dans l'espace, dx/dt est la projection de sa vitesse sur l'axe x ; cette grandeur est en même temps égale à la vitesse de la projection orthogonale M_1 du point M sur l'axe x, puisque x est l'abscisse du point M_1. *Si donc on projette sur un axe fixe un point mobile et sa vitesse, la projection de la vitesse sera égale à la vitesse de la projection.*

31. Accélération. Appliquons à l'origine O d'un système de coordonnées fixe un vecteur $\overline{OP}$ égal en module et en direction à la vitesse $\mathbf{v}$ du point mobile M (fig. 20). Lorsque le point M parcourt sa trajectoire, le point P

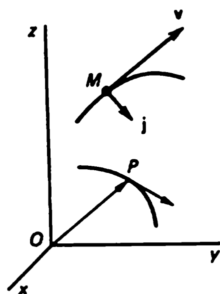


Fig. 20

décrit une certaine courbe appelée *hodographe* de la vitesse du point M. Les coordonnées du point P sont égales, par construction, aux dérivées des coordonnées du point M : $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

La vitesse du point P de l'hodographe est égale à la dérivée par rapport au temps du rayon-vecteur $\overline{OP}$:

$$\frac{d\overline{OP}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

et ses projections sur les axes de coordonnées seront donc les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.

Le vecteur **j**, égal en module et en direction à la vitesse du point de l'hodographe mais appliqué au point M, porte le nom d'*accélération du point M* :

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Selon cette définition, *les valeurs algébriques des projections de l'accélération* **j** *d'un point mobile sur les axes de coordonnées à un instant t sont égales aux dérivées secondes des coordonnées du point par rapport au temps* :

$$j_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

32. Mouvement circulaire. Considérons le mouvement d'un point sur une trajectoire circulaire de rayon ϱ dont le centre O est fixe ; ce mouvement est décrit par les équations

$$x = \varrho \cos \theta(t), \quad y = \varrho \sin \theta(t).$$

Les projections de la vitesse du mobile ponctuel sont données par les formules

$$v_x = x' = -\varrho\theta' \sin \theta, \quad v_y = y' = \varrho\theta' \cos \theta,$$

où x' et y' sont les dérivées par rapport au temps. On a aussi $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\varrho\theta = \varrho\theta'$. Les projections de l'accélération sur les axes x et y sont

$$j_x = x'' = -\varrho\theta'' \sin \theta - \varrho\theta'^2 \cos \theta,$$
$$j_y = y'' = \varrho\theta'' \cos \theta - \varrho\theta'^2 \sin \theta.$$

Les projections de l'accélération sur la tangente au cercle j_τ et sur la normale j_n sont alors égales à

$$j_\tau = \varrho\theta'' = \frac{dv}{dt}, \quad j_n = \varrho\theta'^2 = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Le cercle le plus intimement tangent à une courbe est le cercle osculateur ; de ce fait le mouvement sur une courbe peut être assimilé au mouvement sur le cercle osculateur et on peut donc s'attendre à ce que les formules des projections de l'accélération sur la tangente et sur la normale présentent un intérêt général.

33. Accélérations tangentielle et normale. Soit τ_0 le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire au point M, orienté dans le sens des arcs de courbe s croissants ; notons $\mathbf{n}_0$ le vecteur unitaire de la normale principale orientée vers le centre de courbure de la trajectoire ; $\mathbf{b}_0$ le vecteur unitaire de la binormale et ϱ le rayon de courbure.

En utilisant la formule de Frenet

$$\frac{d\tau_0}{ds} = \frac{\mathbf{n}_0}{\varrho}$$

on obtient

$$\mathbf{v} = v\tau_0, \quad \mathbf{j} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau_0 + \frac{v^2}{\varrho}\mathbf{n}_0.$$

On en tire les valeurs algébriques des projections de l'accélération sur les axes du trièdre constitué par la tangente, la normale et la binormale à la trajectoire, qui sont égales à

$$j_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad j_n = \frac{v^2}{\varrho}, \quad j_b = 0.$$

§ 2. Mouvement relatif du point matériel

34. Mouvements absolu, relatif et d'entraînement. Ajoutons aux axes fixes (repère fixe) un corps solide mobile et le système de coordonnées rectangulaires qui y est attaché (repère mobile).

Le mouvement du point par rapport au repère mobile est appelé *mouvement relatif.*

Le mouvement du point par rapport au repère fixe est appelé *mouvement absolu.*

Le *mouvement d'entraînement* d'un point pendant l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ est le mouvement par rapport au repère fixe que ce point posséderait si à l'instant t et pendant l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ il était indissolublement lié au repère mobile et se déplacerait donc avec lui.

La trajectoire, la vitesse, l'accélération sont dites absolues, relatives ou d'entraînement suivant que le mouvement est absolu, relatif ou d'entraînement.

35. Théorème. *La vitesse absolue d'un mobile ponctuel est égale à la somme géométrique des vitesses relative et d'entraînement.*

Soient un corps solide S et un point M de ce corps*) tous deux animés d'un mouvement. Soient M_1 la position du point M à l'instant $t + \Delta t$, et

*) Le point M n'est pas nécessairement fixé au corps.

S_1 la position du corps solide au même instant $t + \Delta t$. Notons M_0 la position du point M à l'instant $t + \Delta t$ s'il ne se déplaçait pas relativement au corps S. Les vecteurs $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_0}$, $\overline{M_0M_1}$ représentent respectivement les déplacements du point M au cours du temps Δt suivant que le mouvement est absolu, d'entraînement ou relatif (fig. 21). L'hypothèse selon laquelle le corps S est absolument rigide est nécessaire pour que la trajectoire M_0M_1 du mouvement relatif ne soit pas déformée dans la position S_1. On a

$$\overline{MM_1} = \overline{MM_0} + \overline{M_0M_1}.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par Δt on obtient

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r,$$

$\mathbf{w}_a$, $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_r$ étant des vecteurs respectivement égaux en module et en direction au vecteur de la vitesse absolue moyenne, au vecteur de la vitesse d'entraînement moyenne et au vecteur de la vitesse relative moyenne.

A la limite lorsque Δt tend vers zéro, de la dernière relation il vient

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \qquad (2.1)$$

La vitesse absolue $\mathbf{v}_a$ est égale à la somme géométrique de la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e$ et de la vitesse relative $\mathbf{v}_r$.

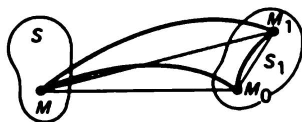


Fig. 21

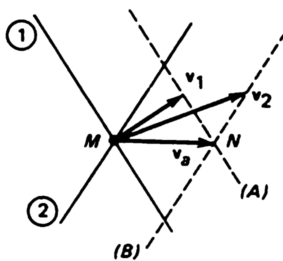


Fig. 22

Le théorème de la composition des vitesses est un théorème important de la mécanique. Il faut résoudre de nombreux problèmes pour bien comprendre que le mouvement relatif est considéré par rapport à un corps solide (jouant le rôle de repère mobile) et que c'est le mouvement de ce corps solide qui est à l'origine du mouvement d'entraînement. Plusieurs problèmes importants concernant des mouvements compliqués d'un point matériel découlent de ce que le mouvement absolu du point peut être représenté par plusieurs mouvements composés dont les vitesses d'entraînement ou relatives ne sont pas entièrement connues.

Nous résoudrons quelques problèmes sur l'application de ce théorème quand nous aurons appris à connaître les mouvements instantanés du corps solide.

Exemple 1. Deux droites concourantes sont animées d'un mouvement de translation dans un plan fixe avec des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ données. Construire géométriquement la vitesse absolue de leur point d'intersection M (fig. 22).

Nous admettrons que le mouvement du point M est un mouvement composé. Le mouvement relatif est alors le mouvement du point M le long de la première droite ; la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_1$ du point M est donnée en module et en direction ; cette vitesse est égale à la vitesse de translation de la première droite ; on connaît aussi la direction de la vitesse relative du point M, mais on ne connaît pas son module. Dans le cas d'un mouvement composé, lorsqu'on entend par mouvement relatif le mouvement du point M le long de la seconde droite, on retrouve une situation analogue, à savoir, on connaît le module et la direction de la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_2$ du point M, tandis que sa vitesse relative n'est connue qu'en direction.

Pour construire la vitesse absolue du point M à l'aide de la formule $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$ on doit appliquer au point M le vecteur $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_1$ et à l'extrémité de ce dernier appliquer le vecteur $\mathbf{v}_r$, dont on ne connaît que la direction ; de ce fait l'extrémité du vecteur $\mathbf{v}_a$ sera représentée par un lieu géométrique — la droite A. L'extrémité de cette même vitesse absolue $\mathbf{v}_a$ du point M doit appartenir aussi à la droite B qui est parallèle à la seconde droite et passe par l'extrémité du vecteur $\mathbf{v}_2$ appliqué au point M. Pour que ces deux conditions soient satisfaites, l'extrémité du vecteur vitesse absolue $\mathbf{v}_a$ doit se trouver au point d'intersection N des droites A et B, d'où $\mathbf{v}_a = \overline{MN}$.

Exemple 2. Un procédé de construction de la tangente à une courbe consiste à considérer cette courbe comme la trajectoire d'un mobile ponctuel dont le mouvement absolu sera considéré comme un mouvement composé. Dans certains cas, il suffit d'un seul mouvement composé et dans d'autres il faut en envisager plusieurs.

Le premier cas concerne la construction de la tangente à la spirale d'Archimède et à la conchoïde de Nicomède. Le deuxième cas concerne la construction de la tangente à l'ellipse, à l'hyperbole, à la parabole et à la lemniscate.

Exemple 3. Construction de la tangente à la conchoïde. Un rayon-vecteur rectiligne tourne autour d'un point fixe O (fig. 23). Lorsque sur ce rayon-vecteur le point A d'un segment AB de longueur constante glisse sur une droite aa' donnée, le point B décrit la courbe appelée conchoïde de Nicomède. Considérons le mouvement du point B comme un mouvement composé : un mouvement relatif du point B le long du rayon OB ;

le rayon-vecteur tourne autour du point O avec une certaine vitesse angulaire. Soit $\mathbf{v}_e$ la vitesse d'entraînement du point B. La vitesse relative du point B est égale à la vitesse relative $\mathbf{v}_r$ du point A. Cette dernière est facile à construire. On en tire $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$ et c'est ce qui détermine la direction de la tangente à la conchoïde de Nicomède.

Exemple 4. Construction de la tangente à l'ellipse (fig. 24). Attachons le système de coordonnées mobile à $\mathbf{r}_1$. La vitesse relative du point M sera alors parallèle à $\mathbf{r}_1$ et la vitesse d'entraînement sera orthogonale à $\mathbf{r}_1$. Attachons le deuxième système de coordonnées à $\mathbf{r}_2$. Les vitesses relative et d'entraînement seront dirigées de façon analogue.

Comme $r_1 + r_2 = 2a$, $\dfrac{dr_1}{dt} = -\dfrac{dr_2}{dt}$, on peut construire la tangente.

36. Supposons que le mobile ponctuel se déplace par rapport au premier référentiel S_1. Posons que le système S_1 soit en mouvement par rapport à un deuxième référentiel S_2, qui, à son tour, est en mouvement par rapport à un troisième référentiel S_3, et ainsi de suite jusqu'au référentiel fixe S.

La vitesse du mobile ponctuel par rapport à S_2 se laisse déterminer par la règle usuelle de composition des vitesses : elle est égale à la somme de la vitesse relative $\mathbf{v}'$ par rapport à S_1 et de la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_1$ que le mobile aurait par rapport à S_2 s'il était immobile dans le référentiel S_1. La vitesse du mobile par rapport à S_3 est égale à la somme géométrique de la vitesse relative rapportée à S_2, i.e. de la vitesse $\mathbf{v}' + \mathbf{v}_1$, et de la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_2$ que le mobile ponctuel aurait dans le référentiel S_3 s'il était immobile dans S_2. La vitesse cherchée est donc égale à

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

En poursuivant les mêmes raisonnements on arrive à la conclusion que la vitesse absolue de notre mobile ponctuel est égale à la somme de sa vitesse relative par rapport au premier référentiel mobile et de toutes les vitesses d'entraînement déterminées par le mouvement du premier référen-

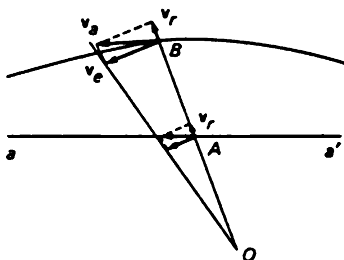


Fig. 23

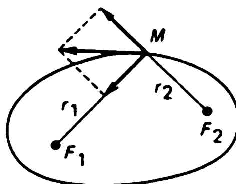


Fig. 24

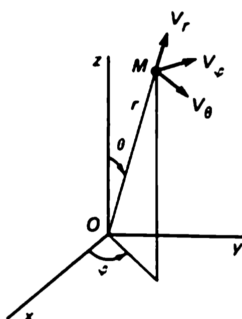


Fig. 25

tiel par rapport au deuxième, du deuxième par rapport au troisième et ainsi de suite.

Lorsqu'on dit qu'un corps ou un mobile ponctuel participe à plusieurs mouvements simultanés, il faut l'entendre dans le sens ci-dessus si on se propose d'appliquer la règle de composition des vitesses d'un mouvement complexe.

Exemple. On peut caractériser la position d'un point dans l'espace à l'aide des coordonnées sphériques : le rayon r, l'angle θ que fait le rayon avec l'axe z et l'angle φ entre l'axe x et la projection du rayon sur le plan xy (fig. 25).

Les coordonnées sphériques r, θ, φ caractérisent trois mouvements : lorsqu'on fait varier r seul, le point M se meut le long du rayon ; si on fait varier l'angle θ seul, le point M décrit un cercle dans le plan passant par l'axe z et le point M, avec O pour centre ; si on fait varier l'angle φ seul, le point M décrit un cercle résultant de la rotation de M autour de l'axe z. La vitesse du mobile ponctuel M peut être projetée sur les tangentes aux trajectoires des trois mouvements orthogonaux, ce qui fournit les projections v_r, v_θ, v_φ. On peut déterminer ces projections en appliquant le théorème de la composition des vitesses d'un mouvement complexe. Pour ce faire posons que la droite OM constitue le système S_1, que le plan passant par l'axe z et le rayon r constitue le système S_2, tandis que le système S est l'espace fixe.

La vitesse du point M dans le référentiel S_1 est égale à

$$v' = v_r = \frac{dr}{dt}$$

et elle est dirigée le long du rayon-vecteur. La vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_1$ qu'aurait le point M dans le référentiel S_2 s'il était immobile sur le rayon

est dirigée suivant la tangente au cercle de rayon r, de centre O et contenu dans le référentiel S_2 ; cette vitesse est orientée dans le sens des angles θ croissants et a pour module

$$v_1 = v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}.$$

La vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_2$ que le point M aurait par rapport au référentiel fixe S si M était immobile dans S_2 est dirigée suivant la tangente au cercle de rayon $r \sin\theta$ décrit en faisant tourner M autour de l'axe z dans le sens des angles φ croissants ; elle a pour valeur

$$v_2 = v_\varphi = r\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Comme les vitesses $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont orthogonales, elles sont égales aux projections orthogonales de $\mathbf{v}$ sur les directions correspondantes de v_r, v_θ et v_φ, comme le montrent les formules ci-dessus.

§ 3. Mouvements simples d'un corps solide

37. On appelle *corps solide* un ensemble de points dont les distances de séparation ne varient pas lors du mouvement de l'ensemble. Un corps solide peut contenir tous les points d'une figure géométrique (une ligne, une surface ou un volume) à condition que dans cette figure mise en mouvement les distances entre les points ne varient pas.

Si on fixe deux points d'un corps solide, ce dernier ne pourra que tourner autour d'une droite passant par ces points ; cette droite est l'axe de rotation du corps solide. Si on rend fixe un troisième point situé hors de la droite ci-dessus, le corps tout entier sera fixé. Ainsi la position d'un corps solide est déterminée par les positions de trois de ses points ne se trouvant pas sur une même droite.

38. Si le corps solide passe d'une position dans une autre, il subit un *déplacement.* Chacun des points du solide exécute alors son propre déplacement. Si on communique à tous les points d'un corps solide des déplacements géométriquement égaux, les distances entre les points resteront les mêmes et le corps solide peut donc effectuer un tel déplacement. Le déplacement d'un corps solide au cours duquel les déplacements de tous ses points sont géométriquement égaux est appelé mouvement de translation. Un vecteur libre égal en module, en direction et en sens aux déplacements des points du corps solide effectuant un mouvement de translation porte le nom de *déplacement de translation* du solide.

Deux déplacements de translation successifs d'un corps solide constituent un déplacement de translation.

On dit qu'un corps solide exécute un mouvement de translation si le déplacement du corps au cours d'un intervalle de temps compris entre deux instants arbitraires est une translation. Dans le cas d'un mouvement de translation d'un corps solide, deux quelconques de ses points A et B effectuent au cours de l'intervalle de temps Δt des déplacements géométriquement égaux, qui sont égaux au déplacement $\Delta \mathbf{u}$ du corps solide. En divisant le déplacement $\Delta \mathbf{u}$ par Δt on obtient la *vitesse moyenne du mouvement de translation du corps solide*

$$\mathbf{w} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t}.$$

En mouvement de translation les vitesses moyennes des différents points du corps solide sont évidemment égales et parallèles à la vitesse moyenne du mouvement de translation du solide. Passant à la limite on vérifie qu'au cours du mouvement de translation tous les points du corps solide possèdent à un instant t des vitesses égales en valeur et en direction à la *vitesse*

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t}$$

du mouvement de translation du corps solide ; $\mathbf{v}$ est un vecteur libre par définition.

La position d'un corps solide peut être pratiquement déterminée à l'aide de trois axes orthogonaux indissolublement liés au corps. Lors d'un mouvement de translation ces axes se déplacent parallèlement à eux-mêmes. Inversement, si les axes orthogonaux (ou même deux droites qui se coupent) liés au corps se déplacent parallèlement à eux-mêmes, le corps solide exécute un mouvement de translation.

39. Rotation autour d'un axe fixe. Si on déplace un corps solide fixé en deux points, il tournera d'un certain angle autour de l'axe passant par les points fixes. Un tel déplacement porte le nom de *rotation*.

Lorsqu'un corps solide tourne autour de l'axe fixe AR (fig. 26), chacun de ses points M décrit un cercle dans le plan perpendiculaire à l'axe avec

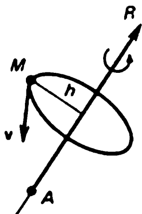


Fig. 26

une vitesse normale au plan MAR et proportionnelle à la distance du point considéré jusqu'à l'axe. La valeur de la vitesse du point M se trouvant à la distance h de l'axe est égale à $h\omega$, où ω est la vitesse de variation de l'angle θ dont tourne le corps solide autour de l'axe AR :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

L'angle θ est l'angle dont tourne le plan MAR lié au corps par rapport à sa position initiale. La grandeur ω porte le nom de vitesse angulaire de rotation du corps.

Pour caractériser la rotation d'un corps solide il faut connaître : la *position de l'axe de rotation*, la *valeur de la vitesse angulaire* et le *sens de rotation*. On peut représenter ces trois éléments par un seul vecteur défini comme suit : à partir d'un point A appartenant à l'axe on porte le vecteur $\overline{AR}$ de module égal à ω et orienté de manière que la rotation autour de l'axe AR se produise dans le sens positif (sens antihoraire) : un observateur dont les pieds sont en A et la tête en R voit la rotation s'accomplir positivement de sa droite vers sa gauche. Le vecteur $\overline{AR}$ caractérisant la rotation du corps solide est appelé vitesse angulaire de rotation du solide. On le désigne par $\omega = \overline{AR}$.

Selon cette définition, le vecteur vitesse angulaire de rotation d'un corps solide est un vecteur glissant puisque son origine peut se trouver en un point quelconque de l'axe de rotation.

La vitesse d'un point quelconque M d'un corps solide tournant autour d'un axe est égale au moment du vecteur vitesse angulaire ω par rapport au point M.

En effet cette vitesse égale en grandeur à $h\omega$ est orthogonale au plan contenant M et ω et est orientée du côté d'où le mouvement autour de AR apparaît comme antihoraire :

$$\mathbf{v} = \overline{MA} \times \omega = \omega \times \overline{AM}.$$

40. Soient p, q, r les projections de la vitesse angulaire ω sur les axes x, y, z d'un système de coordonnées rectangulaires.

Si le vecteur ω est appliqué au point A de coordonnées x_0, y_0, z_0, la vitesse linéaire $\mathbf{v}$ du point M de coordonnées x, y, z est égale au produit vectoriel des vecteurs ω et $\overline{AM}$ dont les projections sont p, q, r et $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ respectivement (fig. 27) :

$$\mathbf{v} = \omega \times \overline{AM} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}.$$

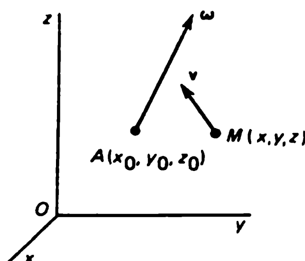


Fig. 27

Les projections du vecteur **v** sur les axes de coordonnées sont donc égales aux déterminants formés à partir de la matrice

$$\begin{Vmatrix} p & q & r \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{Vmatrix},$$

i.e.

$$\begin{aligned} v_x &= q(z - z_0) - r(y - y_0), \\ v_y &= r(x - x_0) - p(z - z_0), \\ v_z &= p(y - y_0) - q(x - x_0). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ce sont les *formules d'Euler.*

Lorsque le point A coïncide avec l'origine des coordonnées O, le vecteur vitesse angulaire ω passe par le point O, les coordonnées x_0, y_0, z_0 sont égales à zéro et les formules ci-dessus s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{v} = \omega \times \overline{OM}, \quad v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

41. Mouvement de translation instantané et mouvement de rotation instantané d'un corps solide. Il peut arriver qu'à un instant t les vitesses de tous les points d'un corps solide sont géométriquement égales. On dit alors que le corps solide exécute à l'instant t un *mouvement de translation instantané.* Il faut alors ne pas oublier que l'expression « mouvement de translation instantané » ne concerne que l'état des vitesses des points d'un corps solide à l'instant t.

Il peut arriver qu'à un certain instant les vitesses de tous les points d'un corps solide soient celles qu'aurait le corps exécutant un mouvement de rotation caractérisé par le vecteur vitesse angulaire ω. On dit alors que le corps exécute à cet instant une *rotation instantanée avec une vitesse angulaire instantanée* ω. Autrement dit, si à l'instant t les vitesses des points d'un corps solide sont déterminées par les formules (2.2) et que les valeurs de x_0, y_0, z_0 et p, q, r sont les mêmes pour tous les points (x, y, z) du

solide, on dit qu'à l'instant considéré t le solide exécute une rotation instantanée avec une vitesse angulaire instantanée $\omega(p, q, r)$ passant par le point (x_0, y_0, z_0). On remarquera aussi que l'expression « rotation instantanée » désigne l'état instantané des vitesses que possèdent les points du solide exclusivement à l'instant considéré.

§ 4. Composition des mouvements de translation instantanés et des rotations instantanées

42. Composition des mouvements de translation simultanés. Considérons un corps solide animé d'un mouvement de translation avec la vitesse $\mathbf{v}'$ par rapport à un référentiel mobile S_1 ; ce dernier est animé d'un mouvement de translation avec la vitesse $\mathbf{v}_1$ par rapport à un second référentiel S_2 qui exécute un mouvement de translation avec la vitesse $\mathbf{v}_2$ par rapport à un référentiel S_3 et ainsi de suite. Dans ces conditions, conformément au théorème de la composition des vitesses d'un mouvement complexe, la vitesse absolue $\mathbf{v}$ des points du corps solide est égale à la somme $\mathbf{v}' + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots$ des vitesses des différents mouvements, donc la même pour tous les points du solide.

Il s'ensuit que *si le corps solide effectue plusieurs mouvements de translation simultanés, dans le sens indiqué plus haut, son mouvement absolu sera aussi de translation. La vitesse de ce mouvement de translation résultant absolu sera à tout instant égale à la somme géométrique des vitesses de translation des mouvements composants.* On peut aussi considérer des mouvements de translation instantanés et leur appliquer le théorème de la composition des vitesses : plusieurs mouvements de translation instantanés effectués simultanément se réduisent à un mouvement de translation instantané résultant.

43. Composition des mouvements de rotation simultanés. Soit un corps solide effectuant deux mouvements de rotation simultanés. Examinons l'état des vitesses à l'instant t. On supposera qu'à l'instant t le corps solide exécute une rotation instantanée avec la vitesse angulaire instantanée ω' par rapport à un référentiel mobile S_1, ce dernier étant animé d'un mouvement de rotation avec la vitesse angulaire instantanée ω_1 par rapport à un système de coordonnées fixe S. On dit alors que le corps solide effectue à l'instant t deux rotations simultanées avec les vitesses angulaires ω' et ω_1.

On supposera que les vecteurs glissants ω' et ω_1 se coupent en un point O. Selon le théorème de la composition des vitesses d'un mouvement complexe, la vitesse linéaire absolue $\mathbf{v}$ du point M du corps solide est égale à

$$\mathbf{v} = \omega' \times \overline{OM} + \omega_1 \times \overline{OM} = \Omega \times \overline{OM},$$

ou

$$\Omega = \omega' + \omega_1.$$

Dans le cas où les vitesses angulaires instantanées ω' et ω_1 se coupent, le mouvement résultant du corps solide sera une rotation instantanée avec une vitesse angulaire instantanée Ω, égale à la somme géométrique des vitesses angulaires instantanées ω' et ω_1. C'est l'essence du théorème de la composition des rotations instantanées autour d'axes qui se coupent.

Si les vitesses angulaires instantanées ω' et ω_1 sont égales en grandeur, sont portées par la même droite mais sont de sens opposés, la vitesse angulaire instantanée résultante Ω sera nulle.

Comme les vecteurs vitesses angulaires instantanées ω' et ω_1 se composent selon la règle du parallélogramme (ou du polyèdre), ce sont des vecteurs glissants se conformant à l'opération d'addition des vecteurs glissants qui se coupent (cf. ch. I).

Il s'ensuit que des systèmes équivalents d'un nombre quelconque de vecteurs vitesses angulaires instantanées de rotation d'un corps solide représentent le même mouvement instantané du solide.

44. Couple des rotations instantanées. Lorsque deux rotations simultanées avec des vitesses angulaires ω et $-\omega$ ne sont pas colinéaires et sont appliquées aux points A et A' respectivement, ils forment un couple de rotations ; le corps solide est animé alors d'un mouvement de translation instantané avec une vitesse égale au moment du couple, vu que la vitesse $\mathbf{v}$ du point M, qui est égale à

$$\mathbf{v} = (\omega \times \overline{AM}) + (-\omega \times \overline{A'M}) = \omega \times (\overline{AM} + \overline{MA'}) = \omega \times \overline{AA'},$$

est la même pour tous les points du corps et égale au moment du couple. Il s'ensuit qu'*un couple de rotations instantanées est équivalent à un mouvement de translation instantané dont la vitesse est égale au moment du couple.*

45. Réduction de plusieurs mouvements de translation et de rotation instantanés et simultanés. Soit un corps solide effectuant simultanément plusieurs mouvements de translation avec les vitesses $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ et plusieurs rotations avec les vitesses angulaires $\omega_1, \omega_2, \ldots$ appliquées respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots$ Ce système de vecteurs vitesses libres et glissants d'un corps solide peut être réduit (voir article 16, p. 20), à l'origine O d'un système de coordonnées fixes, à un vecteur vitesse angulaire résultant

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots$$

passant par l'origine O et à un vecteur vitesse de translation résultante

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \overline{OA_1} \times \omega_1 + \overline{OA_2} \times \omega_2 + \ldots$$

Le procédé de réduction consiste à associer aux mouvements instantanés donnés des rotations instantanées caractérisées par les vecteurs ω_1 et $-\omega_1$; ω_2 et $-\omega_2$, ... appliqués au point O. Le vecteur ω_1 appliqué en A_1 et le vecteur $-\omega_1$ appliqué en O forment un couple de rotations instantanées qui est équivalent à un mouvement de translation instantané avec une vitesse égale au moment du couple $\overline{OA_1} \times \omega_1$. De même, le couple de rotations instantanées ω_2 appliqué en A_2 et $-\omega_2$ appliqué en O est équivalent à un mouvement de translation instantané d'un corps solide avec la vitesse $\overline{OA_2} \times \omega_2$, etc. Ainsi au point O s'effectue la composition des vecteurs vitesses angulaires $\omega_1, \omega_2, \ldots$ et des vecteurs libres des vitesses $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \overline{OA_1} \times \omega_1, \overline{OA_2} \times \omega_2, \ldots$ des mouvements de translation instantanés.

La réduction des mouvements instantanés d'un corps solide à un nouveau point d'application O' s'effectue à l'aide des opérations suivantes qui transforment un système de mouvements instantanés en un système équivalent : on associe au point O' deux vecteurs vitesses de rotation ω et $-\omega$ ayant même module, même direction mais pointant en sens opposés. Le vecteur ω appliqué en O et le vecteur $-\omega$ appliqué en O' forment un couple de rotations équivalent à un mouvement de translation instantané du corps solide avec une vitesse égale au moment du couple $\omega \times \overline{OO'}$. Après cette opération le système est réduit à une rotation instantanée avec la vitesse angulaire ω passant par O' et à un mouvement de translation instantané avec la vitesse

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \omega \times \overline{OO'}. \tag{2.3}$$

La vitesse $\mathbf{v}'$ du mouvement de translation dépend du choix du point O', tandis que la vitesse de rotation angulaire ω reste la même en module et en direction quel que soit le point de réduction.

On peut réduire le mouvement d'un corps solide à un mouvement hélicoïdal ou à une hélice cinématique lorsque ω est différent de zéro. En effet, si on prend pour point de réduction le point O' (fig. 28) déterminé par la relation de l'article 20, p. 22,

$$\overline{OO'} = \frac{\omega \times \mathbf{v}}{\omega^2},$$

conformément à (2.3), les mouvements du corps solide seront réduits, au point O', à un mouvement hélicoïdal composé d'une rotation avec la vitesse angulaire ω passant par O' et d'un mouvement de translation avec la vitesse

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \omega \times \overline{OO'} = \frac{(\omega, \mathbf{v})}{\omega} \left(\frac{\omega}{\omega}\right) = v \cos \alpha \left(\frac{\omega}{\omega}\right)$$

qui est dirigé suivant le vecteur vitesse angulaire ω. Le paramètre de l'hélice est la quantité $\beta = v'/\omega$; le pas de l'hélice est alors égal à $2\pi\beta$.

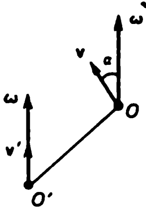


Fig. 28

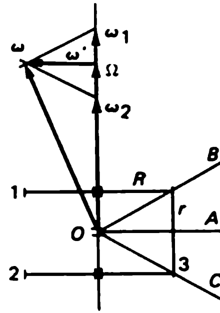


Fig. 29

Exemple. Soient trois roues dentées d'un engrenage conique (fig. 29). Les roues dentées *1* et *2* ont des rayons égaux à R et tournent autour d'un axe vertical avec les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 respectivement. La roue dentée *3* de rayon r peut tourner autour d'un axe horizontal $\overline{OA}$ qui, à son tour, peut tourner autour de l'axe vertical. Déterminer la vitesse angulaire instantanée de la roue dentée *3*.

On peut assimiler le mouvement de la roue dentée *3* à un mouvement complexe si on considère ses mouvements en rapport avec ceux des roues *1* et *2*. Dans le premier cas, le mouvement d'entraînement sera la rotation avec la vitesse angulaire ω_1 et le mouvement relatif sera le roulement de la roue *3* sur la roue *1*, i.e. la rotation autour de l'axe OB. Ainsi l'extrémité du vecteur vitesse angulaire ω de rotation de la roue dentée *3* doit être portée par la droite parallèle à OB et passant par l'extrémité du vecteur ω_1. Dans le second cas, le mouvement d'entraînement sera la rotation avec la vitesse angulaire ω_2 et le mouvement relatif sera le roulement de la roue dentée *3* sur la roue dentée *2*, donc une rotation autour de OC. De ce fait, l'extrémité du vecteur vitesse angulaire ω de rotation de la roue *3* doit être portée par la droite parallèle à OC et passant par l'extrémité du vecteur ω_2. Le vecteur ω est ainsi complètement déterminé.

Sa projection verticale Ω et sa projection horizontale ω' sont données en grandeur par les expressions

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\frac{R}{r}.$$

§ 5. Distribution des vitesses dans un solide en mouvement

46. Pour trouver la distribution des vitesses dans un corps solide en mouvement nous considérerons un système de coordonnées $O_1x_1y_1z_1$ fixe et un système $Oxyz$ indissolublement lié au corps solide en mouvement. Les cosinus des angles que font entre eux les axes sont inscrits sous la forme du tableau suivant :

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Les coordonnées d'un point M du solide seront notées x_1, y_1, z_1 et x, y, z par rapport au référentiel fixe et au référentiel mobile. Ces coordonnées sont liées entre elles par les formules

$$x_1 = x_0 + x\alpha + y\alpha_1 + z\alpha_2, \; \ldots,$$

où x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées de l'origine O du référentiel mobile ; les autres formules s'en déduisent par permutation cyclique.

Les projections v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} de la vitesse du point M sur les axes fixes sont données par les formules

$$v_{x_1} = \frac{dx_0}{dt} + x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\alpha_1}{dt} + z\frac{d\alpha_2}{dt}, \; \ldots$$

Les projections de la vitesse sur les axes mobiles sont

$$v_x = v_{x_1}\alpha + v_{y_1}\beta + v_{z_1}\gamma, \; \ldots$$

En dérivant par rapport au temps les formules évidentes $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \ldots, \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \ldots$ on obtient $\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt} = 0, \ldots$, ainsi que

$$\alpha_2\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\gamma_1}{dt} = -\left(\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1\frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}\right) = p,$$

$$\alpha\frac{d\alpha_2}{dt} + \beta\frac{d\beta_2}{dt} + \gamma\frac{d\gamma_2}{dt} = -\left(\alpha_2\frac{d\alpha}{dt} + \beta_2\frac{d\beta}{dt} + \gamma_2\frac{d\gamma}{dt}\right) = q,$$

$$\alpha_1\frac{d\alpha}{dt} + \beta_1\frac{d\beta}{dt} + \gamma_1\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\alpha\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma\frac{d\gamma_1}{dt}\right) = r.$$

Avec ces notations on obtient

$$v_x = v_x^0 + qz - ry, \quad v_y = v_y^0 + rx - pz, \quad v_z = v_z^0 + py - qx,$$

où v_x^0, v_y^0, v_z^0 désignent les projections de la vitesse du point O sur les axes de coordonnées mobiles. Sous forme vectorielle ces formules s'écrivent

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \omega \times \overline{OM}, \tag{2.4}$$

où ω désigne le vecteur dont les projections sont p, q, r. En comparant ces formules avec les formules d'Euler on constate que (*théorème d'Euler*) : *le mouvement d'un corps solide se réduit, à un instant t, à un mouvement de translation instantané avec la vitesse* $\mathbf{v}^0$ *et à une rotation instantanée avec une vitesse angulaire instantanée* ω *passant par le point O.*

L'axe de l'hélice cinématique instantanée est le lieu géométrique des points dont les vitesses $\mathbf{v}$ sont parallèles au vecteur vitesse angulaire instantanée ω. L'équation de l'axe de l'hélice instantanée dans le référentiel mobile est de la forme

$$\frac{v_x^0 + qz - ry}{p} = \frac{v_y^0 + rx - pz}{q} = \frac{v_z^0 + py - qx}{r}.$$

Le lieu géométrique des axes de l'hélice instantanée dans le référentiel mobile porte le nom d'*axoïde mobile.*

Si on note p_1, q_1, r_1 les projections de la vitesse angulaire instantanée ω sur les axes fixes, $v_{x_1}^0$, $v_{y_1}^0$, $v_{z_1}^0$ les projections de $\mathbf{v}^0$ sur les axes fixes et x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'origine O des axes mobiles dans le référentiel fixe, l'équation de l'axe de l'hélice instantanée s'écrira sous la forme

$$\frac{v_{x_1}^0 + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0)}{p_1} = \frac{v_{y_1}^0 + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0)}{q_1} = \frac{v_{z_1}^0 + p_1(y_1 - y_0) - q_1(x_1 - x_0)}{r_1}.$$

Le lieu géométrique de ces axes dans le référentiel fixe porte le nom d'*axoïde fixe.*

L'axe de l'hélice instantanée devient indéterminé si la vitesse angulaire instantanée ω est nulle. Dans ce cas, le mouvement du solide se réduit à un mouvement de translation instantané ou à un repos instantané.

Exemple. Le théorème d'Euler permet de trouver des dérivées par rapport à t des vecteurs unitaires $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ du système d'axes de coordonnées mobiles, rapporté au référentiel fixe. La dérivée $\tilde{d}\mathbf{i}/dt$ (voir art. 24 sur la définition de la dérivée d'un vecteur par rapport à un système d'axes fixes $O_1x_1y_1z_1$) représente la vitesse par rapport à $O_1x_1y_1z_1$ de l'extrémité d'un vecteur égal et parallèle à $\mathbf{i}$ dont le point d'application se trouve à l'origine O_1 des axes fixes.

Conformément à la formule (2.4), pour trouver la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur $\mathbf{i}$ déplacé au point O_1 il faut faire coïncider les points

O et O_1 ($\mathbf{v}^0 = 0$) :

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i},$$

et de même

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

47. A l'instant t l'axoïde fixe Σ et l'axoïde mobile Σ' possèdent une génératrice commune — l'axe AB de l'hélice instantanée correspondant à l'instant t (fig. 30).

Nous allons démontrer que les axoïdes se touchent. Soit un point P qui se déplace sur l'axoïde mobile de telle façon qu'à tout instant t il se trouve sur l'axe de l'hélice instantanée correspondant à cet instant t. Posons que la courbe S' tracée sur l'axoïde mobile représente la trajectoire relative du point P, et la courbe S, tracée sur l'axoïde fixe, représente la trajectoire du mouvement absolu du point P. La vitesse absolue $\mathbf{v}_a$ du point P est liée à la vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e$ et à la vitesse relative $\mathbf{v}_r$ de ce point P par l'égalité exprimant la loi de la composition des vitesses

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

La vitesse absolue $\mathbf{v}_a$ qui est tangente à S est contenue dans le plan tangent à l'axoïde fixe Σ. La vitesse relative $\mathbf{v}_r$ est tangente à S' et est contenue dans le plan tangent à Σ'. La vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e$ du point P situé sur l'axe de l'hélice instantanée est égale à la vitesse de translation du mouvement hélicoïdal instantané et est dirigée suivant la génératrice commune aux axoïdes Σ et Σ' correspondant à l'instant t. Comme l'égalité ci-dessus est valable pour tous les mouvements indiqués du point P, on peut affirmer que les plans tangents aux axoïdes Σ et Σ' contenant l'axe AB de l'hélice instantanée coïncident. Or cela signifie qu'à l'instant t les axoïdes Σ et Σ' se touchent le long de l'axe AB de l'hélice instantanée.

Le mouvement instantané d'un corps solide résulte de la rotation instantanée de l'axoïde mobile autour de l'axe de l'hélice instantanée avec la vitesse angulaire ω et du mouvement de translation simultané de l'axoïde mobile suivant la direction de l'hélice instantanée.

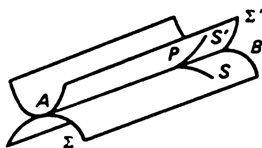


Fig. 30

48. Mouvement continu d'un corps solide parallèlement à un plan fixe. Dans le cas où tous les points d'un corps solide se déplacent parallèlement à un plan fixe P, on dit que le corps effectue un mouvement plan. La section S du corps par le plan P est alors une figure plane (liée au corps) qui se meut dans son plan (fig. 31).

Le mouvement de la section S détermine le mouvement du corps tout entier. La droite qui projette le point M sur le plan de la section S est liée au corps solide, elle est orthogonale au plan fixe P et se déplace parallèlement à elle-même et tous ses points décrivent des trajectoires semblables avec les mêmes vitesses.

Si les mouvements instantanés du corps solide ne sont pas de translation, l'hélice instantanée se réduit à une rotation instantanée avec une vitesse angulaire orthogonale au plan fixe P. Les axoïdes, celui qui est fixe Σ et celui qui est mobile Σ', sont alors des surfaces cylindriques dont les génératrices sont orthogonales au plan fixe (fig. 32).

La trace de l'intersection de l'axe de la rotation instantanée avec le plan fixe P porte le nom de *centre instantané de rotation* (C.I.R.) de la figure plane. Les intersections des axoïdes Σ et Σ' avec le plan fixe P déterminent les courbes c_f et c_m qui sont les lieux géométriques des centres instantanés de rotation respectivement dans le plan fixe P et dans la section S du corps solide. Les courbes c_f et c_m sont appelées respectivement *centroïde fixe* et *centroïde mobile*. Dans la section S, le C.I.R. décrit une trajectoire relative c_m (centroïde mobile) et dans le plan fixe P le C.I.R. décrit le centroïde fixe c_f. La vitesse d'entraînement $\mathbf{v}_e$ du C.I.R. C est alors nulle, étant le point du corps qui coïncide avec le centre instantané C. On en déduit que

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r$$

ou

$$\frac{ds_f}{dt} = \frac{ds_m}{dt},$$

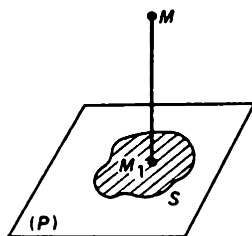


Fig. 31

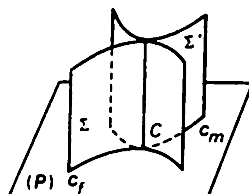


Fig. 32

où s_f et s_m désignent respectivement les longueurs des arcs des centroïdes c_f et c_m. Il s'ensuit que les centroïdes c_f et c_m sont tangentes en C.I.R. C et que le mouvement plan du corps solide se réduit à un roulement sans glissement de la centroïde mobile c_m (roulante) sur la centroïde fixe c_f (base).

Dans le cas d'un mouvement plan, la vitesse d'un point M du corps est orthogonale à la droite CM, C étant le centre instantané de rotation. De ce fait, si on connaît à l'instant t les directions des vitesses de deux points M_1 et M_2 du corps et si ces vitesses ne sont pas parallèles et ne sont pas orthogonales au segment M_1M_2, le centre instantané de rotation devra être construit comme le point d'intersection des perpendiculaires dressées aux points M_1 et M_2 à leurs vitesses.

§ 6. Théorème de Coriolis. Distribution des accélérations dans un corps solide en mouvement

49. Considérons un système de coordonnées fixe $O_1x_1y_1z_1$ et un système de coordonnées mobile $Oxyz$. Soit un point M de coordonnées x_1, y_1, z_1 dans le référentiel fixe et x, y, z dans le référentiel mobile ; notons les cosinus des angles entre les axes de coordonnées conformément au tableau que nous avons déjà utilisé pour la démonstration du théorème d'Euler

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Notons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point O. On a

$$x_1 = x_0 + x\alpha + y\alpha_1 + z\alpha_2.$$

Il s'ensuit que les projections de l'accélération absolue $\mathbf{j}_a$ du point M sur les axes fixes seront données par les formules

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + x\frac{d^2\alpha}{dt^2} + y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2\frac{d^2z}{dt^2} + 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\alpha_2}{dt}\right), \ldots$$

Les projections de l'accélération d'entraînement $\mathbf{j}_e$ sur les axes fixes se laissent déterminer dès que l'on impose les valeurs des coordonnées x, y, z ;

par conséquent

$$j_{ex_1} = \frac{d^2 x_0}{dt^2} + x\frac{d^2\alpha}{dt^2} + y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \ \ldots$$

Les projections de l'accélération relative $\mathbf{j}_r$ sur les axes fixes se laissent déterminer si l'on impose les valeurs de x_0, y_0, z_0 et les valeurs de tous les cosinus des angles entre les axes :

$$j_{rx_1} = \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2\frac{d^2z}{dt^2}, \ \ldots$$

Les projections de l'accélération complémentaire $\mathbf{j}_c$ sur les axes fixes sont données par les formules

$$j_{cx_1} = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\alpha_2}{dt}\right), \ \ldots$$

On arrive ainsi au *théorème de Coriolis*

$$\mathbf{j}_a = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_r + \mathbf{j}_c.$$

L'accélération absolue d'un point matériel est égale à la somme géométrique des accélérations relative, d'entraînement et complémentaire (ou de Coriolis).

Les projections de l'accélération de Coriolis sur les axes de coordonnées mobiles $j_{cx} = j_{cx_1}\alpha + j_{cy_1}\beta + j_{cz_1}\gamma, \ \ldots$ compte tenu des valeurs des projections p, q, r de la vitesse angulaire instantanée ω de rotation du système mobile sur les axes de coordonnées mobiles (art. 46, p. 44) sont égales à

$$j_{cx} = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \ j_{cy} = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \ j_{cz} = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Or $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont les projections de la vitesse relative $\mathbf{v}_r$ du point M sur les axes mobiles. Par conséquent

$$\mathbf{j}_c = 2(\omega \times \mathbf{v}_r) ;$$

l'accélération de Coriolis est égale au double du produit vectoriel de la vitesse angulaire de rotation du système de coordonnées mobile par la vitesse relative du point mobile. Il s'ensuit que l'accélération de Coriolis est orthogonale aussi bien à ω qu'à $\mathbf{v}_r$ et devient nulle lorsque s'annule au moins l'une des trois quantités : le sinus de l'angle entre ω et $\mathbf{v}_r$, la quantité ω ou la quantité v_r.

50. Comme nous disposons déjà des formules pour les dérivées des vecteurs unitaires, nous pouvons donner une autre démonstration du théorème de Coriolis.

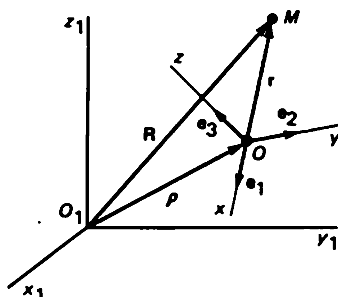


Fig. 33

La position du point M dans les systèmes de coordonnées, qui ont été utilisés dans la démonstration précédente, peut être déterminée à l'aide du rayon-vecteur $\mathbf{R}$ dans le système d'axes fixes $O_1x_1y_1z_1$, du rayon-vecteur $\mathbf{r}$ dans le système d'axes mobiles $Oxyz$ et du rayon-vecteur $\boldsymbol{\varrho}$ de l'origine O des axes mobiles $Oxyz$ (fig. 33) :

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\varrho} + \mathbf{r}.$$

On en tire

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varrho}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

mais

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

En appliquant les formules des dérivées des vecteurs unitaires on a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

d'où

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\boldsymbol{\varrho}}{dt} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

En dérivant encore une fois l'expression de $\mathbf{v}_a$ par rapport à t dans le système fixe $O_1x_1y_1z_1$ on obtient

$$\mathbf{j}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\varrho}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r});$$

mais comme

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{j}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

on a

$$\mathbf{j}_a = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \omega' \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{j}_r + 2(\omega \times \mathbf{v}_r)$$

($\omega' = d\omega/dt$). En fixant la position du point M dans le référentiel mobile on trouve que l'accélération d'entraînement $\mathbf{j}_e$ est égale à

$$\mathbf{j}_e = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \omega' \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}),$$

où $d^2\varrho/dt^2$ est l'accélération absolue de l'origine O du référentiel mobile ; $\omega' \times \mathbf{r}$ est l'accélération de rotation déterminée par l'accélération angulaire

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{dp}{dt}\mathbf{i} + \frac{dq}{dt}\mathbf{j} + \frac{dr}{dt}\mathbf{k}\ ;$$

le terme $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ représente l'accélération axipète.

Faisons passer par l'origine O du référentiel mobile les vecteurs vitesse angulaire ω et accélération angulaire ω' (fig. 34). L'accélération de rotation $\omega' \times \mathbf{r}$ est numériquement égale à $\omega' h'$, h' étant la distance séparant le point M du vecteur accélération angulaire ω'. L'accélération axipète $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$, étant orthogonale aux vecteurs ω et $\omega \times \mathbf{r}$, est dirigée suivant la perpendiculaire h abaissée du point M sur le vecteur vitesse angulaire ω et est numériquement égale à $\omega^2 h$.

L'accélération de Coriolis est donnée par la formule

$$\mathbf{j}_c = 2(\omega \times \mathbf{v}_r).$$

Si on compare cette formule avec la formule d'Euler $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \overline{OM}$ de la vitesse du point M d'un corps solide animé d'un mouvement de rotation avec la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ passant par le point O, on peut énoncer une règle utile pour la détermination pratique de la direction et du sens de l'accélération de Coriolis dans différents cas concrets. L'accélération de Coriolis $\mathbf{j}_c$ en module, en direction et en sens est égale au double de la vitesse de l'extrémité du vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_r$ si on le fait tourner avec une vitesse angulaire ω passant par l'origine du vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_r$.

51. Considérons, à titre d'exemple, les projections de l'accélération sur le rayon-vecteur et sur une direction transversale.

Interprétons le mouvement du point M comme un mouvement complexe consistant en un mouvement d'entraînement avec le rayon-vecteur OM tournant autour du pôle fixe O avec une vitesse angulaire $d\theta/dt$ et en un mouvement relatif du point M le long de OM (fig. 35). Posons que l'accélération relative $j_r = d^2r/dt^2$ est dirigée suivant le rayon-vecteur dans le sens des valeurs croissantes de r. Dans le mouvement d'entraînement le long du cer-

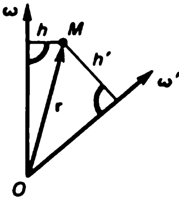


Fig. 34

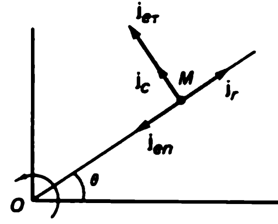


Fig. 35

cle de rayon r et de centre O, la composante normale de l'accélération, donnée par

$$j_{en} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

est orientée le long du rayon-vecteur vers le centre O, et sa composante tangentielle donnée par

$$j_{e\tau} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

est orientée perpendiculairement à r dans le sens des angles θ croissants. Dans le même sens est orientée l'accélération de Coriolis

$$j_c = 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt},$$

car la vitesse relative $v_r = dr/dt$ est orientée le long du rayon dans le sens des r croissants.

Les projections de l'accélération en coordonnées polaires dans le plan suivant la direction radiale et suivant la direction transversale sont respectivement égales à

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}.$$

Le deuxième exemple concerne l'accélération d'un point M se déplaçant sur une sphère immobile de rayon r (fig. 36).

Nous considérons le mouvement du point M comme un mouvement complexe. Convenons de considérer le mouvement relatif du point M par rapport au plan du méridien NM tournant dans l'espace autour de l'axe ON avec la vitesse angulaire $d\varphi/dt$. La vitesse relative $v_r = r\frac{d\theta}{dt}$ est tangente

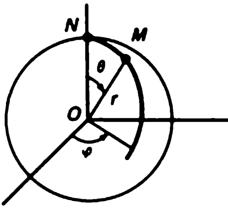


Fig. 36

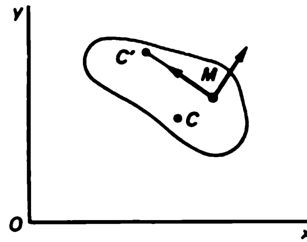


Fig. 37

au méridien au point M et est orientée dans le sens de l'accroissement de l'angle θ. Les accélérations relatives tangentielle et normale sont égales à

$$j_{r\tau} = \frac{dv_r}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad j_{rn} = \frac{v_r^2}{r} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

La trajectoire du mouvement d'entraînement est la parallèle de rayon $r \sin \theta$. La vitesse d'entraînement $v_e = r \sin \theta \dfrac{d\varphi}{dt}$ est tangente à la parallèle et est orientée dans le sens des angles φ croissants. Les accélérations d'entraînement tangentielle et normale sont égales à

$$j_{e\tau} = r \sin \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad j_{en} = r \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

L'accélération de Coriolis est numériquement égale à

$$j_c = 2r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos \theta$$

et est orientée suivant la tangente à la parallèle dans le sens des angles φ croissants.

52. En qualité de troisième exemple, considérons la distribution des accélérations dans une figure plane se déplaçant dans son propre plan. Ce problème a été parfaitement traité par De la Vallée Poussin*). Considérons une figure plane qui se déplace dans son propre plan (fig. 37). Rapportons-la à un système d'axes rectangulaires fixes Oxy. Notons x_0, y_0 les coordonnées du centre instantané de rotation C et notons ω la valeur algébrique de la vitesse angulaire instantanée. La vitesse d'un point $M(x, y)$ apparte-

*) De la Vallée Poussin Ch.-J. *Leçons de mécanique analytique*, t. 1, Louvain, 1932.

nant à la figure possède, conformément aux formules d'Euler, les projections suivantes :

$$v_x = -\omega(y - y_0), \quad v_y = \omega(x - x_0).$$

Les projections de l'accélération du point M sont égales aux dérivées de ces quantités par rapport au temps

$$\begin{aligned} j_x &= \omega y_0' - \omega^2(x - x_0) - \omega'(y - y_0), \\ j_y &= -\omega x_0' - \omega^2(y - y_0) + \omega'(x - x_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Cherchons le point C' de coordonnées a, b, dont l'accélération est égale à zéro. Ce point C' porte le nom de *centre instantané des accélérations.* On tire de (2.5) :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega y_0' - \omega^2(a - x_0) - \omega'(b - y_0), \\ 0 &= -\omega x_0' - \omega^2(b - y_0) + \omega'(a - x_0). \end{aligned}$$

Le déterminant $\omega^4 + \omega'^2$ relatif aux inconnues a et b n'est différent de zéro que si ω et ω' ne sont pas nuls simultanément. Dans ce cas, le point $C'(a, b)$ existe en tant que centre instantané des accélérations. En soustrayant les deux dernières relations des formules (2.5) il vient

$$\begin{aligned} j_x &= -\omega^2(x - a) - \omega'(y - b), \\ j_y &= -\omega^2(y - b) + \omega'(x - a). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'accélération du point $M(x, y)$ se compose de deux accélérations : l'accélération $C'M \cdot \omega^2$ orientée de M vers le centre instantané des accélérations C' et l'accélération $C'M \cdot \omega'$ qui est orthogonale à $C'M$ et orientée dans un sens dépendant du signe de ω', i.e. dans le sens de rotation si $\omega' > 0$ et à l'encontre de la rotation si $\omega' < 0$.

Pour un point de coordonnées x_0, y_0 coïncidant avec le centre instantané de rotation les seconds membres des formules (2.5) se réduisent à leurs premiers termes $\omega y_0'$ et $-\omega x_0'$. Ces termes représentent donc les projections de l'accélération $\mathbf{j}_C$ d'un point de la figure qui coïncide, à l'instant considéré, avec le centre instantané x_0, y_0. Si le centre instantané de rotation était fixe, le mouvement du point M serait circulaire et les seconds membres de (2.5) se réduiraient aux deuxième et troisième termes. Or, dans ce mouvement circulaire du point M, l'accélération normale égale en valeur à $j_n = \omega^2 r$ est dirigée suivant le rayon vers le centre instantané C, et l'accélération tangentielle égale à $j_\tau = r\omega'$ est orthogonale à CM et orientée dans le sens de rotation déterminé par le signe de ω'.

On peut arriver à ce résultat à l'aide d'une construction géométrique. Imaginons un système de coordonnées mobile dont l'origine se trouve en un point de la figure mobile qui coïncide avec le centre instantané de rota-

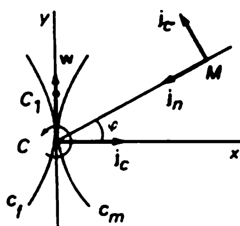


Fig. 38

tion et dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel fixe. Dans ce référentiel mobile, l'accélération de Coriolis des points de la figure ne se manifestera pas puisque le système d'axes mobile est animé d'un mouvement de translation. Le mouvement relatif de la figure plane à l'instant t est un mouvement de rotation autour de l'origine des coordonnées. Les accélérations relatives sont donc égales à

$$j_n = \omega^2 r, \quad j_\tau = \omega' r.$$

On trouve facilement l'accélération d'entraînement j_C. A l'instant $t + \Delta t$ la figure tournera avec la vitesse angulaire $\omega + \Delta\omega$ autour de son centre instantané C_1 (fig. 38). L'accélération de l'origine du système d'axes mobiles sera égale à

$$j_C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CC_1(\omega + \Delta\omega) - 0}{\Delta t} = \omega w_C\,; \quad w_C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CC_1}{\Delta t}\,;$$

elle sera orientée suivant la vitesse $\mathbf{w}_C$ de l'origine des coordonnées à l'instant t. Nous obtenons ainsi l'égalité géométrique

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_C + \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_\tau.$$

53. Cercle et pôle des inflexions. Disposons l'origine d'un système d'axes fixe au centre instantané de rotation C et menons l'axe Cx suivant $\mathbf{j}_C$ (fig. 38). Les projections de $\mathbf{j}_C$ sur les axes x, y sont alors respectivement égales à

$$j_C = \omega y_0' > 0, \quad -\omega x_0' = 0.$$

Il en découle $x_0' = 0$ et la vitesse $\mathbf{w}$ du centre instantané de rotation C est portée par l'axe y. Si on oriente l'axe y positif suivant $\mathbf{w}$, le sens de rotation de l'axe x vers l'axe y coïncide avec la rotation de ω puisque $\omega y_0' > 0$. Autrement dit, le vecteur vitesse $\mathbf{w}$ fait un angle droit avec l'accélération $\mathbf{j}_C$ dans le sens de rotation de ω.

Notons r et φ les coordonnées polaires du point M (que nous supposons différent du point C) ; r est le rayon-vecteur $\overline{CM}$ et φ est l'angle que fait ce vecteur avec l'axe Cx. L'accélération $j_n = \omega^2 r$ est orientée suivant MC. L'orientation positive de l'accélération $j_\tau = r\omega'$ est déterminée par le sens de la rotation directe autour du point C, donc de l'axe x vers l'axe y. Les valeurs algébriques des accélérations totales normale $\mathbf{j}_n$ et tangentielle $\mathbf{j}_\tau$ sont

$$j_n = \omega^2 r - \omega w \cos\varphi, \quad j_\tau = r\omega' - \omega w \sin\varphi. \tag{2.6}$$

Notons u la quantité positive

$$u = \frac{w}{\omega};$$

la valeur de l'accélération normale s'écrira alors

$$j_n = \omega^2(r - u\cos\varphi).$$

Examinons quelques applications de ces formules.

Cherchons d'abord le lieu géométrique des points d'une figure en mouvement, dont les accélérations normales à l'instant considéré t sont égales à zéro. D'après les formules (2.6), l'équation de cette courbe est de la forme

$$r = u\cos\varphi.$$

C'est l'équation d'un cercle dont le diamètre $CK = u$ est porté par l'axe Cx (fig. 39). Ce cercle porte le nom de *cercle des inflexions* (de La Hire) et le point K celui de *pôle des inflexions*. Les points de la figure situés sur ce cercle se trouvent à l'instant t aux points d'inflexions de leurs trajectoires car leurs accélérations normales $j_n = v^2/\varrho$ sont nulles et vice versa. En outre, la tangente en ce point à la trajectoire passe par le pôle des inflexions K, car d'une part cette tangente est orthogonale à MC et d'autre part l'angle KMC doit s'appuyer sur le diamètre CK si le point M se trouve sur le cercle des inflexions.

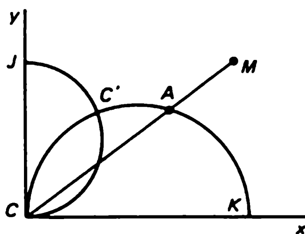


Fig. 39

Cherchons maintenant le lieu géométrique des points d'une figure dont les accélérations tangentielles sont nulles. Selon les formules (2.6), l'équation de ce lieu géométrique est

$$r = \frac{\omega w}{\omega'} \sin \varphi.$$

Portons sur l'axe Cy un segment CJ égal à $\omega w/\omega'$ en grandeur et en signe. L'équation ci-dessus est l'équation du cercle (de Bresse) dont CJ est le diamètre.

Si la vitesse angulaire ω devient égale à zéro, le point K s'éloignera à l'infini ; le point J s'éloignera à l'infini si l'accélération angulaire ω' devenait nulle, ω restant différent de zéro. Si ω et ω' devenaient nuls, la position du point J serait indéterminée. Si nous excluons ce dernier cas, les deux cercles, ayant en commun le point C, se coupent en un point C', dont l'accélération totale est égale à zéro ; le point C' est le *centre des accélérations.*

Si la vitesse w du centre instantané de rotation et la vitesse angulaire instantanée ω ne sont pas nulles tandis que $\omega' = 0$, la circonférence de Bresse se confond avec l'axe x*) et le rôle de centre des accélérations C' sera assumé par le pôle des inflexions K. Si $\omega' \neq 0$ et $\omega = 0$, le centre des accélérations coïncidera avec le centre instantané de rotation C.

*) Il est question de la dégénérescence du cercle de Bresse en la droite Cx dans le cas limite où $\omega' \to 0$.

CHAPITRE III

STATIQUE

54[*]**).** L'étude de la statique et de la dynamique implique non seulement l'espace et le temps mais aussi la notion de force.

La statique est l'étude de l'équilibre des forces. On entend par force toute cause mettant en mouvement ou tendant à mettre en mouvement tous les corps auxquels cette force est appliquée ; on estimera donc toute force d'après l'importance du mouvement qu'elle provoque ou tend à provoquer. A l'état d'équilibre la force n'exerce aucune action réelle et ne se manifeste que par la tendance du corps à se mettre en mouvement. Néanmoins il convient de la mesurer par l'effet qu'elle provoquerait si elle agissait en l'absence de tout obstacle[**]).

La dynamique est consacrée à l'étude des forces qui accélèrent ou ralentissent le mouvement et aux mouvements variés qu'elles déterminent[***]).

La mécanique se fonde sur les lois de Newton qu'il éconça en 1687[****]).

Lois de Newton

I. Tout corps reste au repos ou est animé d'un mouvement uniforme jusqu'à ce que les forces qui lui sont appliquées l'obligent à modifier cet état.

Cette loi connue comme le principe d'inertie de Galilée postule en fait l'existence d'un système de référence dans lequel tout point matériel isolé reste au repos ou est animé d'un mouvement rectiligne uniforme en l'absence de toute force.

II. La modification du mouvement est proportionnelle à la force appliquée et se produit dans le sens d'action de cette force.

---

*) Les articles 54 et 55 ont été écrits sur la base d'un cours de N. Tchétaev.

**) Lagrange L. *Mécanique analytique*, t. I.

***) *Idem*.

****) Newton I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1726.

Newton entendait par mouvement le produit de la masse par la vitesse ; la masse est la mesure de la quantité de matière. Sous forme mathématique cette loi s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

et pour $m = \text{const}$

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

III. Si deux points matériels agissent l'un sur l'autre, l'action et la réaction sont égales, mais de sens opposés.

IV. Si un point matériel est soumis à l'action de plusieurs forces, on peut les remplacer par leur résultante.

§ 1. De l'équilibre

55. La statique a pour objet l'étude des conditions d'équilibre des systèmes matériels, i.e. des conditions pour lesquelles un système de corps matériels, soumis à l'action de forces données en présence des liaisons existant entre les corps, reste à l'état de repos par rapport à un système de référence supposé fixe.

Les lois de la statique peuvent être déduites de la dynamique comme un cas particulier, mais la statique peut aussi être développée indépendamment en s'appuyant sur plusieurs axiomes.

I. Les forces appliquées à un point matériel peuvent être remplacées par leur résultante, ce qui signifie qu'elles se composent d'après la règle du parallélogramme.

II. Lorsqu'un corps solide se trouve en équilibre, l'application (ou la suppression) de deux forces de même intensité, de sens opposés et portées par une même droite ne perturbe pas l'équilibre.

III. Lorsqu'un corps solide subit l'action de deux forces, il sera en équilibre si et seulement si ces forces sont d'intensités égales, portées par une même droite et de sens opposés.

En s'appuyant sur certains corollaires de ces axiomes on a établi les conditions (générales) nécessaires et suffisantes pour qu'un corps solide soit en équilibre.

Corollaires. 1. D'après l'axiome II, on peut déplacer la force qui agit sur un corps solide le long de sa ligne d'action. Cela signifie que les forces qui agissent sur les corps solides sont représentées par des vecteurs glissants.

2. D'après l'axiome II, lorsqu'un corps se trouve en équilibre sous l'action d'un système de forces, il conservera son état d'équilibre sous l'action d'un système de forces équivalent au premier.

3. Tout système de forces peut être réduit à deux forces qui lui sont équivalentes.

Déplaçons le point d'application d'un système de forces à l'origine des coordonnées. Conformément à la théorie des vecteurs glissants, ce système se laisse réduire au vecteur résultant $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ et au moment du couple résultant $\mathbf{Q} = \sum \mathbf{Q}_i$. Comme on peut admettre que l'une des forces du couple coupe la ligne d'action de $\mathbf{F}$, le système de forces agissant sur un corps solide se réduit toujours à ces deux forces.

4. Il résulte du corollaire 3 et de l'axiome III qu'un corps solide soumis à l'action d'un système de forces peut être en équilibre si et seulement si ce système est équivalent à zéro.

Analytiquement, si un corps solide est soumis à l'action des forces $\mathbf{F}_i$ (X_i, Y_i, Z_i) passant par les points M_i (x_i, y_i, z_i), les équations d'équilibre seront de la forme

$$X = \sum X_i = 0, \quad Y = \sum Y_i = 0, \quad Z = \sum Z_i = 0 \quad (\mathbf{F} = 0),$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \\ M &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ N &= \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathbf{Q} = 0).$$

Si le corps n'est pas libre, selon l'axiome les liaisons auxquelles est assujetti le système de points matériels peuvent être remplacées par des forces exerçant une action équivalente à celle des liaisons.

Ces forces sont appelées *réactions des liaisons*.

On peut diviser les forces agissant sur un corps solide en forces actives qui peuvent être définies arbitrairement et agissent sur le corps et en forces passives ou réactions des liaisons qui se manifestent spontanément en raison de l'existence des forces actives.

Donnons quelques exemples.

Exemple 1. Un corps solide pesant est suspendu à un fil flexible inextensible. Le poids est une force active, la tension du fil est une force passive (fig. 40, *a*).

Exemple 2. Un corps solide repose sur une surface. Si la surface est lisse, la réaction, qui est une force passive, est dirigée suivant la normale à la surface (fig. 40, *b*).

Exemple 3. Un barreau pesant repose sur une table horizontale. S'il se trouve en équilibre, la réaction de la table équilibre le poids, est dirigée suivant la normale à la table et est égale au poids $\mathbf{P}$ (fig. 40, *c*). Appliquons

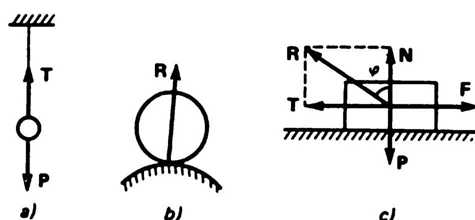


Fig. 40

au barreau une force horizontale **F**. Si le plan sur lequel repose le barreau n'est pas lisse, le barreau restera en équilibre tant que **F** ne dépassera pas une certaine valeur **Φ**. Il s'ensuit que la réaction **R** est opposée à la résultante du poids **P** et de la force **F** ; on peut représenter **R** par la somme de la réaction normale **N** = −**P** et de la force de frottement tangentielle **T** = −**F**. Si **R** fait un angle β avec le plan, on a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{T}{N} = \frac{F}{P}.$$

Si on fait croître F, à l'instant où **F** = **Φ** le corps se mettra en mouvement. La valeur de la force de frottement correspondant à Φ est appelée *frottement de démarrage* ; la valeur correspondante φ de l'angle β est appelée *angle de frottement* ;

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Phi}{P}$$

est le *coefficient de frottement.*

Coulomb a formulé les lois de frottement qui ont été établies empiriquement.

56. Lorsqu'un corps solide est soumis à trois forces et se trouve en équilibre, ces trois forces doivent nécessairement être contenues dans un même plan, et si deux de ces forces se coupent en un point P, la troisième force doit passer par P.

En effet, considérons un point O situé sur la ligne d'action de la force $\mathbf{F}_3$ (fig. 41). Les triangles S_1 et S_2 construits sur les forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ et dont les sommets sont en O doivent être contenus dans le même plan, quelle que soit la position du point O sur la direction de la force $\mathbf{F}_3$, puisque la somme des moments des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ par rapport au point O doit être nulle selon la condition d'équilibre :

$$\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = 0.$$

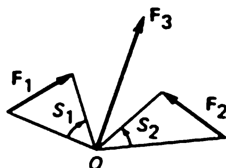


Fig. 41

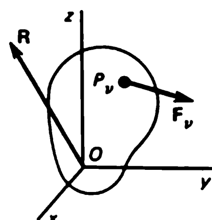


Fig. 42

Il s'ensuit que les forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ qui se font équilibre sont nécessairement contenues dans le même plan.

Si les lignes d'action des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ se coupent en un point P, l'analyse des moments de toutes les forces par rapport au point P implique, en vertu de la condition d'équilibre, que

$$\text{moment}_P \mathbf{F}_3 = 0,$$

c.-à-d. que la force $\mathbf{F}_3$ doit passer par le point P.

57. Corps solide dont un point seulement est fixe. Notons O le point fixe du corps solide où nous plaçons l'origine des axes de coordonnées cartésiennes fixes $Oxyz$ (fig. 42). Posons que sur les points $P_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ du corps solide s'exercent des forces actives données $\mathbf{F}_\nu$ dont les projections sur les axes de coordonnées sont X_ν, Y_ν, Z_ν. Posons aussi que la réaction $\mathbf{R}$ du point fixe a pour projections sur les mêmes axes les quantités X', Y', Z' et que les moments des forces actives sont L_ν, M_ν, N_ν.

Les conditions d'équilibre du corps soumis à l'action des forces $\mathbf{F}_\nu$ et de la réaction $\mathbf{R}$ sont de la forme

$$\sum X_\nu + X' = 0, \quad \sum Y_\nu + Y' = 0, \quad \sum Z_\nu + Z' = 0,$$

$$\sum L_\nu = \sum (y_\nu Z_\nu - z_\nu Y_\nu) = 0, \quad \sum M_\nu = \sum (z_\nu X_\nu - x_\nu Z_\nu) = 0,$$

$$\sum N_\nu = \sum (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu) = 0.$$

Les trois premières équations permettent de trouver les trois projections inconnues de la réaction $\mathbf{R}$ au point O et les trois dernières équations des moments expriment les conditions d'équilibre proprement dites.

Lorsque ces dernières équations sont vérifiées, le corps solide dont le point O est fixe, se trouvera en équilibre sous l'action des forces appliquées, indépendamment des projections X', Y', Z' de la réaction, qui ne figurent pas dans ces équations.

58. Corps solide dont deux points sont fixes. Considérons le cas d'un corps solide dont les points O et O' sont fixes (fig. 43). Rien ne s'oppose à ce que nous placions l'origine des coordonnées au point O et que nous orientions l'axe z le long de la droite OO', les axes x et y étant disposés orthogonalement à l'axe z. Posons que les points $P_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ de ce corps solide sont soumis à l'action de forces actives déterminées $\mathbf{F}_\nu$, dont les projections sur les axes de coordonnées sont X_ν, Y_ν, Z_ν. On supposera que sous l'action de ces forces le corps, dont les points O et O' sont fixes, se trouve dans un état d'équilibre. Aux points O et O' s'appliquent les réactions $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$ s'exerçant sur le corps en plus des forces données $\mathbf{F}_\nu$.

En notant h la distance entre les points fixes et X, Y, Z et X', Y', Z' les projections des réactions $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$, les équations d'équilibre seront de la forme

$$\sum X_\nu + X + X' = 0, \quad \sum Y_\nu + Y + Y' = 0, \quad \sum Z_\nu + Z + Z' = 0,$$
$$L - hY' = 0, \quad M + hX' = 0, \quad N = 0.$$

La seule équation qui ne contient pas les projections des réactions inconnues des points fixes est l'équation $N = 0$ et c'est elle qui exprime la condition d'équilibre du corps solide dont deux points sont fixes lorsque ce corps est soumis à l'action des forces $\mathbf{F}_\nu$ données. Les cinq premières équations servent à déterminer les six projections des réactions des appuis. Un tel problème est statiquement indéterminé car on ne peut déterminer six inconnues à l'aide de cinq équations ; ces équations permettent évidemment de déterminer successivement X', Y', X, Y, tandis que les projections Z et Z' ne se laissent pas déterminer séparément, on ne peut évaluer que leur somme.

59. Considérons le cas de l'équilibre d'un corps solide dont plusieurs points A_s ($s = 1, \ldots, k$) reposent sur un plan que l'on supposera être lisse.

Faisons coïncider le plan défini par les points A_s avec le plan de coordonnées Oxy (fig. 44). Dans ce système de coordonnées, les coordonnées

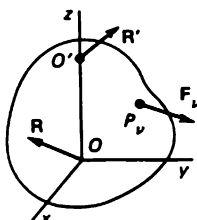


Fig. 43

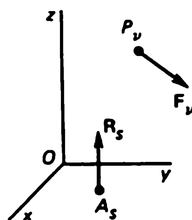


Fig. 44

des points A_s seront désignées par a_s, b_s, 0 et les projections des réactions $\mathbf{R}_s$ de la surface lisse en un point A_s seront désignées par 0, 0, R_s.

Posons que les points $\mathbf{P}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ du corps solide sont soumis à l'action des forces $\mathbf{F}_\nu(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ ($\nu = 1, \ldots, n$) et que sous cette action le solide reposant sur le plan $z = 0$ se trouve en équilibre. Dans ces conditions, les équations d'équilibre seront de la forme

$$\sum X_\nu = 0, \quad \sum Y_\nu = 0, \quad \sum Z_\nu + \sum R_s = 0,$$

$$L + \sum b_s R_s = 0, \quad M - \sum a_s R_s = 0, \quad N = 0,$$

où L, M, N désignent les projections du moment résultant du système de forces imposées $\mathbf{F}_\nu$ par rapport à l'origine des coordonnées ; les projections du moment de la réaction $\mathbf{R}_s$ ont été calculées par la règle connue à l'aide de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_s & b_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{Vmatrix}.$$

Le problème peut être statiquement déterminé si le nombre de points A_s ne dépasse pas trois puisque pour déterminer les réactions $\mathbf{R}_s$ on ne dispose que de trois équations où figurent les R_s.

Etablissons pour le cas $k = 3$ la condition de résolubilité de ces équations :

$$R_1 + R_2 + R_3 + \sum Z_\nu = 0,$$
$$a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 - M = 0,$$
$$b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 + L = 0.$$

Ce système d'équations linéaires peut avoir une solution déterminée pour R_1, R_2, R_3 si le déterminant composé avec les coefficients des inconnues est différent de zéro :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Selon une formule connue de géométrie analytique, le déterminant figurant dans le premier membre de l'inégalité ci-dessus est égal, au signe près, au double de l'aire du triangle formé par les points A_1, A_2, A_3. En conséquence, la condition qui assure la détermination statique du problème considéré réside dans le fait que les trois points A_1, A_2, A_3 ne doivent pas être portés par la même droite, c.-à-d. que le triangle $A_1A_2A_3$ ait une aire différente de zéro.

§ 2. Eléments de statique graphique

Les équations exprimant l'équilibre d'un corps solide s'écrivent :

$$\sum F_\nu = 0, \quad \sum m_\nu = 0.$$

Dans le cas de l'équilibre, le polygone des forces et le polygone des moments sont fermés. Cette propriété géométrique a été bien élaborée pour le cas plan en statique graphique.

60. Le nœud. Considérons une corde avec un nœud A auquel est appliquée une force extérieure (fig. 45). Les deux bouts de la corde sont fixés. Si le nœud et la corde sont en équilibre, le nœud est soumis aux tensions T et T' exercées par les bouts gauche et droit de la corde. Construisons le diagramme des forces en présence. Traçons quelque part dans le plan un vecteur $\mathbf{F}$ égal et parallèle à la force connue $\mathbf{F}$ s'exerçant sur le nœud. Menons par l'extrémité de ce vecteur une ligne parallèle au bout de droite de la corde et par son origine une ligne parallèle au bout de gauche de la corde. Ces lignes se coupent en un point O appelé *pôle*. Comme dans la position d'équilibre du nœud A le triangle des forces $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ doit être fermé en vertu de l'équation d'équilibre, sur le diagramme des forces, les côtés du triangle correspondent en grandeur, en direction et en sens à $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$. Le sens de parcours du triangle dépend du sens de la force $\mathbf{F}$.

61. Polygone funiculaire. Soient données, pour simplifier, trois forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ contenues dans un même plan (fig. 46). Nous nous proposons de construire un polygone funiculaire à nœuds, qui seraient soumis à des forces connues, tel que les bouts du polygone étant fixés, celui-ci serait en équilibre sous l'action des forces appliquées.

Construisons dans un plan le vecteur $\mathbf{F}_1$, à l'extrémité de ce vecteur appliquons le vecteur $\mathbf{F}_2$ et à l'extrémité de ce dernier appliquons le vecteur $\mathbf{F}_3$. Choisissons un point O pour pôle du diagramme des forces et relions ce point O avec les extrémités des vecteurs construits. On obtient ainsi des rayons que nous numéroterons *1'*, *2'*, *3'*, *4'* dans l'ordre de parcours de la ligne brisée $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2\mathbf{F}_3$. Menons d'un point A_1 situé sur la ligne d'action de la force $\mathbf{F}_1$ les rayons *1* et *2* parallèlement aux rayons *1'* et *2'* du dia-

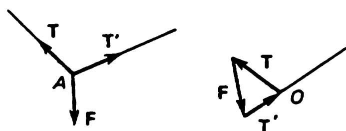


Fig. 45

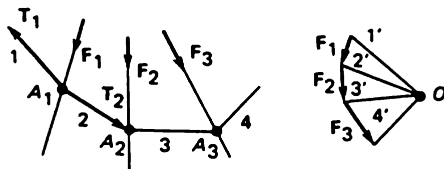


Fig. 46

gramme des forces. L'intersection du rayon *2* avec la ligne d'action de la force $\mathbf{F}_2$ détermine le point A_2. Menons à partir du point A_2 une droite *3* parallèlement au rayon *3'* du diagramme des forces jusqu'à son intersection au point A_3 avec la ligne d'action de la force $\mathbf{F}_3$. A partir du point A_3 menons une droite *4* parallèlement au rayon *4'* du diagramme des forces.

Le polygone $A_1A_2A_3$ ainsi construit est un polygone funiculaire se trouvant en équilibre lorsque ses bouts *1* et *4* sont fixés et qu'à ses nœuds A_1, A_2, A_3 sont appliquées les forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$. En effet, au nœud A_1 correspond sur le diagramme des forces le triangle de côtés *1'* et *2'* sous-tendus par le vecteur $\mathbf{F}_1$. En parcourant ce triangle dans le sens de la force $\mathbf{F}_1$ on trouve que les côtés du triangle des forces représentent en grandeur, en direction et en sens les tensions $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ s'exerçant sur le nœud A_1 dans le sens des côtés *1* et *2* du triangle funiculaire. Au nœud A_2 correspond sur le diagramme des forces le triangle dont les rayons orientés vers le pôle O sont sous-tendus par le vecteur $\mathbf{F}_2$, etc. Sur le diagramme des forces les triangles correspondant aux nœuds du triangle funiculaire sont contigus.

Le polygone funiculaire ainsi construit représente une solution particulière, car sa structure dépend du choix du pôle O du diagramme des forces et du nœud initial A_1 sur la ligne d'action de la force $\mathbf{F}_1$.

62. Composition des forces. Le polygone funiculaire permet de résoudre d'importants problèmes de statique tel le problème de la composition de plusieurs forces, celui du moment des forces par rapport à un point donné, etc.

Supposons qu'il s'agit de composer les forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ contenues dans un même plan (fig. 47). Construisons d'abord le diagramme des forces, autrement dit le polygone des vecteurs forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$; choisissons un pôle O du diagramme des forces et relions le pôle O aux extrémités des vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ à l'aide des segments de droite *1'*, *2'*, *3'*. Le vecteur $\mathbf{F}$ reliant le point d'application du vecteur $\mathbf{F}_1$ à l'extrémité du vecteur $\mathbf{F}_2$ est égal en grandeur, en direction et en sens à la somme des vecteurs $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}.$$

Il reste à trouver le point d'application de la somme des forces imposées. Construisons, selon la méthode décrite, un polygone funiculaire A_1A_2 dont les côtés sont désignés par *1*, *2*, *3*. Prolongeons les côtés *1* et *3* du polygone funiculaire jusqu'au point S de leur intersection. Nous allons démontrer que la résultante des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ données passe par le point S. On sait que la force résultante est égale et parallèle au vecteur $\mathbf{F}$ du diagramme des forces. Le polygone funiculaire construit se trouve en équilibre sous l'action des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ appliquées aux nœuds A_1 et A_2 lorsque les bouts

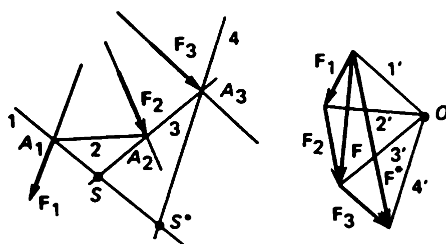


Fig. 47

sont fixés. Les tensions dans les fils *1*, *2*, *3* sont déterminées par les rayons *1'*, *2'*, *3'* correspondants du diagramme des forces. Les directions des tensions s'exerçant sur le nœud A_1, par exemple, se déterminent en effectuant le parcours du triàngle des forces sous-tendant le vecteur $\mathbf{F}_1$. Décomposons la force $\mathbf{F}_1$ suivant les côtés *1* et *2* du polygone funiculaire $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12}$; la composante $\mathbf{F}_{11}$ (triangle des forces sous-tendant le vecteur $\mathbf{F}_1$) le long du côté *1* du polygone funiculaire sera égale et parallèle au côté *1'* du diagramme des forces et sera orientée de l'origine du vecteur $\mathbf{F}_1$ vers le pôle *O*. La composante $\mathbf{F}_{12}$ de la force $\mathbf{F}_1$ le long du côté *2* sera égale et parallèle au côté *2'* du diagramme des forces et sera orientée du pôle *O* vers l'extrémité du vecteur $\mathbf{F}_1$. On décomposera la force $\mathbf{F}_2$ suivant les côtés *2* et *3* du polygone funiculaire :

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{22} + \mathbf{F}_{23} ;$$

la composante $\mathbf{F}_{22}$ est égale et parallèle au côté *2'* du diagramme des forces et est orientée de l'origine du vecteur $\mathbf{F}_2$ vers le pôle *O* ; la composante $\mathbf{F}_{23}$ est égale et parallèle au côté *3'* du diagramme des forces et est orientée du pôle vers l'extrémité du vecteur $\mathbf{F}_2$. Les forces $\mathbf{F}_{12}$ et $\mathbf{F}_{22}$ sont portées par le côté *2* du polygone funiculaire, sont égales en module et de sens opposés, elles se détruisent donc mutuellement. Les forces $\mathbf{F}_{11}$ et $\mathbf{F}_{23}$ se coupent au point *S* ; on peut les déplacer afin de pouvoir les considérer comme appliquées au point S^* et de les composer selon la règle du parallélogramme en utilisant directement le diagramme des forces :

$$\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{23} = \mathbf{F}.$$

Ainsi la résultante des forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ passe par le point d'intersection *S* des côtés extrêmes du polygone funiculaire ; on détermine le module et l'orientation de la résultante à l'aide du diagramme des forces, le vecteur **F** soustendant le triangle des forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$.

Mettons en jeu une troisième force $\mathbf{F}_3$. Associons au polygone funiculaire existant le polygone funiculaire correspondant à un système de trois forces. Sur le diagramme des forces faisons aboutir le vecteur $\mathbf{F}_3$ à l'extrémité du vecteur $\mathbf{F}_2$ et relions l'extrémité de $\mathbf{F}_3$ par le segment *4'* au pôle O déjà défini. Du point d'intersection A_3 du côté *3* du polygone funiculaire avec la ligne d'action de la force $\mathbf{F}_3$ menons le côté *4* du polygone funiculaire parallèlement au côté *4'* du diagramme des forces. Le polygone funiculaire $A_1A_2A_3$ ainsi construit, dont les côtés sont *1*, *2*, *3*, *4*, détermine directement le polygone funiculaire contenant les nœuds S, A_3, construit pour les forces $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_3$ à l'aide du diagramme des forces *1'*, *3'*, *4'*, construit sur les vecteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}_3$ avec le même pôle O.

La somme des forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ est égale à la somme de deux forces, à savoir la force $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, qui est appliquée au point S selon l'exposé précédent, et la force $\mathbf{F}_3$. Selon les considérations ci-dessus, la somme de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}_3$ est égale à la force

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

qui est égale et parallèle au vecteur $\mathbf{F}^*$ du diagramme des forces, qui relie l'origine du vecteur $\mathbf{F}_1$ à l'extrémité du vecteur $\mathbf{F}_3$ dans le polygone et qui est appliquée au point d'intersection S^* des côtés extrêmes *1*, *4* du polygone funiculaire.

Si l'on a affaire à n forces $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$, on reprendra la construction précédente en ajoutant à chaque fois une nouvelle force et finalement on arrivera à la conclusion : la somme des forces $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ est égale et parallèle au vecteur

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

construit selon la règle du polygone et appliqué au point d'intersection des côtés extrêmes du polygone funiculaire construit pour le système de forces donné $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$.

Pour le système des forces $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ possédant une résultante $\mathbf{F}$, les côtés extrêmes de tous les polygones funiculaires construits avec ces forces se coupent en des points portés par une même droite qui est la ligne d'action de la force résultante $\mathbf{F}$.

On utilise le procédé de construction de la somme de plusieurs forces données fondé sur la construction du polygone funiculaire, par exemple pour la détermination du barycentre d'un corps complexe, lorsque l'on connaît les barycentres de ses parties.

63. Moment. On se propose de déterminer le moment de la force $\mathbf{F}$ par rapport à un point C (fig. 48). Construisons le vecteur $\mathbf{F}$, égal et parallèle à la force $\mathbf{F}$ et de même sens que cette dernière ; choisissons un pôle O et relions l'origine et l'extrémité du vecteur $\mathbf{F}$ au pôle O avec les segments

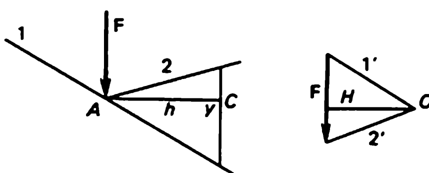


Fig. 48

1' et *2'*. Menons une ligne *1* parallèlement au côté *1'* jusqu'à son point d'intersection *A* avec la force **F** et du point *A* menons une droite *2* parallèlement au côté *2'*. Menons par le point *C* une ligne parallèle à la force **F** donnée. Les côtés *1* et *2* du polygone funiculaire intercepteront sur cette ligne un segment *y*. En vertu de la similitude des triangles (A, y) et (O, F) on a

$$\frac{F}{H} = \frac{y}{h}.$$

La valeur du moment de la force **F** par rapport au point *C* est donc égale à

$$M = Fh = Hy.$$

Le moment sera positif si le segment *y* est orienté de bas en haut depuis son point d'intersection avec le côté *1* jusqu'au point de son intersection avec le côté *2*.

Etant donné que dans l'expression du moment figure la longueur de la perpendiculaire abaissée du pôle *O* du diagramme des forces sur le vecteur **F**, les problèmes relatifs aux moments des forces sont plus faciles pour les systèmes de forces parallèles pour lesquels la perpendiculaire *H* est commune. Dans les applications, cette situation concerne les cas où les forces extérieures sont des forces de pesanteur. Soient par exemple deux forces parallèles $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$; déterminer le moment de ces forces par rapport au point *C* (fig. 49). Commençons par la construction du polygone funiculaire.

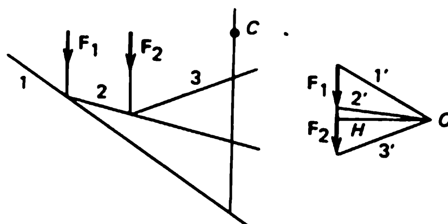


Fig. 49

Menons par le point C une ligne parallèle aux forces agissantes et notons y_{ik} le segment de la verticale intercepté par les côtés i et k du polygone funiculaire et orienté du côté i vers le côté k. Selon la démonstration ci-dessus, le moment de la force $\mathbf{F}_1$ par rapport au point C est égal à Hy_{12} et le moment de la force $\mathbf{F}_2$ par rapport à C est égal à Hy_{23} ; le moment résultant sera égal au produit de H par le segment y_{13} compris entre les côtés extrêmes du polygone funiculaire :

$$M = H(y_{12} + y_{23}) = Hy_{13}.$$

64. Si le système des forces parallèles $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ est équivalent à zéro, le diagramme des forces et le polygone funiculaire correspondant seront fermés. La condition de la nullité du vecteur résultant $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n = 0$ rend évident le fait que le polygone des forces du diagramme des forces est fermé. Nous allons démontrer que le polygone funiculaire correspondant à des forces parallèles qui s'équilibrent $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ doit être fermé (fig. 50). Le moment résultant M des forces $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ par rapport à un point C est égal à $M = Hy_{1,n+1}$; pour des forces qui s'équilibrent, le moment M est nul, ce qui implique que $y_{1,n+1} = 0$ et que les côtés 1 et $n + 1$ du polygone funiculaire coïncident, etc.

Problème. Sur une poutre horizontale AB agissent les forces verticales $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ (fig. 51). Déterminer les réactions d'appui $\mathbf{R}_a$ et $\mathbf{R}_b$. Construisons le polygone funiculaire. Marquons sur les verticales passant par les supports A et B les nœuds a et b du polygone funiculaire. Etant donné que la poutre était en équilibre, les forces actives $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ et les réactions d'appui $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{R}_b$ inconnues doivent s'équilibrer, le polygone funiculaire construit avec ces forces doit être fermé et son côté *4* doit passer par les nœuds a et b. Sur le diagramme des forces, au côté *4* doit correspondre le côté *4'* qui lui est parallèle. Le côté *4'* détermine les réactions $\mathbf{R}_a$ et $\mathbf{R}_b$; la réaction $\mathbf{R}_b$ est égale et parallèle au côté du diagramme des forces compris entre *3'* et *4'* (au nœud b se joignent les côtés *3* et *4* du polygone funiculaire) ; la réaction $\mathbf{R}_a$ est égale et parallèle au côté du diagramme des forces sous-tendu par les segments *4'* et *1'*. Soit H la hauteur du diagramme des forces (non représentée sur la figure) ; menons une verticale par la section C de la poutre ; les côtés *4*, *2* du polygone funiculaire interceptent sur cette verticale le segment y_{24}. A quoi est égal le produit Hy_{24} ? Les côtés *4*, *1*, *2* du polygone funiculaire sont conjugués aux forces $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{F}_1$, les côtés *4*, *2* étant les côtés extrêmes du polygone funiculaire construit avec les forces $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{F}_1$; en conséquence Hy_{24} est égal au moment de ces forces par rapport à la section C, que l'on appelle moment de flexion.

A quoi est égal le plus grand moment de flexion ?

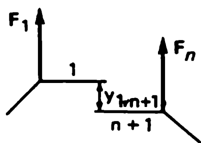


Fig. 50

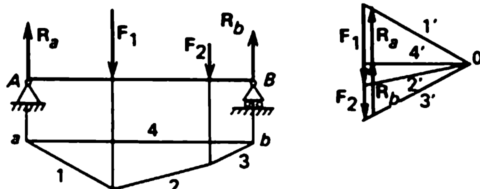


Fig. 51

§ 3. De l'équilibre des poutres en treillis

65. On appelle *poutre en treillis* (ou *treillis*) un assemblage de barres articulées. On n'envisagera que le cas où chaque barre ne comporte que deux charnières. Les points de jonction des barres sont appelés *nœuds*. Si les forces extérieures, les forces de résistance y compris, ne sont appliquées qu'aux charnières de la poutre en treillis, il s'agit des *barres* proprement dites. Si certaines barres sont soumises à des forces qui ne sont pas appliquées aux charnières, elles portent le nom de *poutres*.

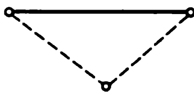
Etant donné qu'un corps solide soumis à l'action de deux forces est en équilibre lorsque ces forces sont égales en module, de sens contraires et agissent le long d'une droite reliant les points d'application, *la barre ne peut être soumise qu'à la traction ou à la compression.* Cela ne s'applique pas aux poutres. On n'envisagera que des *treillis plans*. Un treillis est dit *statiquement déterminé* si on ne peut en soustraire aucune barre sans perte de rigidité. Si un treillis statiquement déterminé comporte n nœuds, il comporte $2n - 3$ barres. En effet, une barre possède deux nœuds, l'adjonction d'un nœud implique l'adjonction de deux barres et le treillis comportera alors $1 + 2(n - 2) = 2n - 3$ barres (fig. 52).

Il existe plusieurs méthodes de calcul des efforts dans les barres d'un treillis.

66. La *méthode de Ritter* (*méthode des sections*) se fonde sur la mise en œuvre de la méthode des trois moments. Son application est simple lorsqu'il s'agit de treillis pouvant être coupés par un contour n'interceptant que trois barres.

Considérons un treillis (fig. 53) en équilibre sous l'action des forces appliquées aux nœuds (indiquées sur la figure). Découpons-le en deux parties comme indiqué, au travers de trois barres x, y, z (on posera que les barres x, y, z sont tendues ; sous cette hypothèse on affectera les forces X, Y, Z agissant le long des barres du signe plus). Les barres y, z se coupent au point R_1, les barres z, x se coupent au point R_2 situé sur leurs prolongements et les barres x, y se coupent au point R_3.

Dans la section considérée les points R_1, R_2, R_3 sont des points de Ritter par rapport auxquels sont établies les équations des moments. Si on rejette


Fig. 52

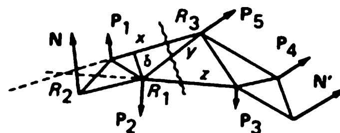


Fig. 53

la partie droite du treillis, sa partie gauche est en équilibre sous l'action des forces **N**, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ s'exerçant sur les nœuds de la partie gauche du treillis et des efforts **X**, **Y**, **Z** s'exerçant le long des barres x, y, z. L'équation des moments de ces forces par rapport au point R_1 s'écrit sous la forme

$$m_{R_1}(\mathbf{X}) + m_{R_1}(\mathbf{N}) + m_{R_1}(\mathbf{P}_1) = 0,$$

or

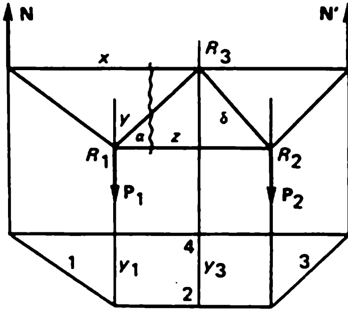
$$m_{R_1}(\mathbf{X}) = -X\delta,$$

où δ désigne la longueur de la perpendiculaire abaissée du point R_1 sur la barre x. On a donc

$$X = \frac{m_{R_1}(\mathbf{N}) + m_{R_1}(\mathbf{P}_1)}{\delta}.$$

Les équations des moments par rapport aux points R_2, R_3 déterminent respectivement les efforts **Y**, **Z** agissant dans les barres y, z.

67. Pour le cas des forces parallèles Kulmann a élaboré une solution graphique du problème. Etant donné un treillis (fig. 54) soumis à l'action de forces parallèles $\mathbf{P}_\alpha$, on construit un polygone funiculaire et on détermine les réactions N, N'. Considérons une section coupant trois barres x, y, z, cherchons l'effort **Z** auquel est soumise la barre z. A cet effet on considère, comme ci-dessus, le point R_3. Une droite verticale parallèle aux sollicitations auxquelles sont soumis les nœuds du treillis délimite entre les côtés *2*, *4* du polygone funiculaire le segment y. L'équation des moments par rapport au point R_3 s'écrit comme suit :



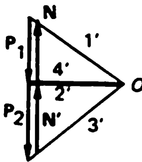


Fig. 54

$$Z\delta - Hy = 0,$$

où δ désigne la distance entre les membrures supérieure et inférieure du treillis et H la hauteur du diagramme des forces. On en conclut que $Z = Hy/\delta$ est positif, ce qui signifie que la barre z est tendue. L'équation des moments relatifs au point R_1 est

$$X\delta + Hy = 0,$$

d'où $X = -\dfrac{Hy}{\delta}$; la barre x est donc comprimée.

Le point R_2 (cf. fig. 53) s'éloigne à l'infini car les barres x, z sont parallèles ; de ce fait, en qualité de troisième équation d'équilibre servant au calcul de l'effort **Y** s'exerçant sur la barre y, on utilisera l'équation des projections sur l'axe verticale

$$Y \sin \alpha + (N - P_1) = 0,$$

d'où $Y = \dfrac{P_1 - N}{\sin \alpha}$.

§ 4. Le centre de masse

68. Le centre de masse d'un système est le point $G(\xi, \eta, \zeta)$ de coordonnées

$$\xi = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad \eta = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad \zeta = \frac{\sum m_k z_k}{M}, \quad M = \sum m_k ;$$

la sommation porte sur tous les points du système.

Divisons le système en deux parties : I – m_i, II – m_j. On aura alors $M_1 = \sum m_i$, $M_2 = \sum m_j$, $M = M_1 + M_2$. Si $G_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ et $G_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ sont respectivement les centres de masse des parties I et II, on aura

$$\sum m_i x_i = \xi_1 M_1, \quad \sum m_j x_j = \xi_2 M_2,$$
$$\sum m_i y_i = \eta_1 M_1, \quad \sum m_j y_j = \eta_2 M_2,$$
$$\sum m_i z_i = \zeta_1 M_1, \quad \sum m_j z_j = \zeta_2 M_2,$$
$$\xi = \frac{\sum m_i x_i + \sum m_j x_j}{M_1 + M_2} = \frac{\xi_1 M_1 + \xi_2 M_2}{M_1 + M_2},$$
$$\eta = \frac{\eta_1 M_1 + \eta_2 M_2}{M_1 + M_2}, \quad \zeta = \frac{\zeta_1 M_1 + \zeta_2 M_2}{M_1 + M_2}.$$

Le centre de masse d'un corps est le centre de masse des centres de masse de ses parties.

Centre de masse d'un triangle. Les centres de masse des bandes homogènes (fig. 55) parallèles à la base se trouvent sur la médiane ; leur centre de masse se situe sur la médiane ; le centre de masse du triangle se situe au point d'intersection O des médianes ;

$$\Delta AOB \infty \Delta aOb, \quad \frac{AO}{Oa} = \frac{AB}{ba}; \quad \Delta ABC \infty \Delta baC, \quad \frac{AB}{ba} = \frac{BC}{aC} = \frac{2}{1};$$

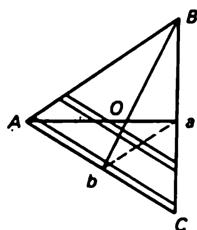


Fig. 55

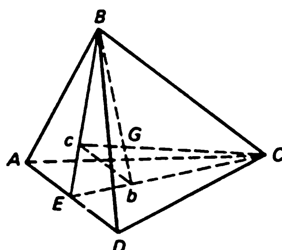


Fig. 56

$$\frac{AO}{Oa} = \frac{2}{1}, \quad AO = 2 \cdot Oa,$$

$$Aa = AO + Oa = 2 \cdot Oa + Oa = 3 \cdot Oa, \quad Oa = \frac{1}{3} Aa.$$

Centre de masse de la pyramide (fig. 56).

$$\Delta Gcb \backsim \Delta GCB, \quad \frac{BG}{Gb} = \frac{BC}{cb} = \frac{BE}{cE} = \frac{3}{1}, \quad Bb = 4Gb.$$

69. Théorèmes de Guldin. *Corps massifs* (fig. 57).

$$\xi = \frac{\int x\, dm}{\int dm}, \quad \eta = \frac{\int y\, dm}{\int dm}, \quad \zeta = \frac{\int z\, dm}{\int dm}.$$

1. $dA = ds \cdot 2\pi y, \quad A = 2\pi \int y\, ds = 2\pi\eta l.$

L'aire de la surface latérale d'un corps de révolution est égale au produit de la longueur du cercle décrit par le centre de masse $2\pi\eta$ par la longueur de la ligne l.

Centre de masse d'un arc de cercle (fig. 58).

$$x = R \cos\alpha, \quad \xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \alpha R\, d\alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin \alpha|_{-\alpha}^{\alpha}}{2R\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Centre de masse d'un demi-cercle (fig. 59, *a*).

$$4\pi R^2 = 2\pi\eta \cdot \pi R, \quad \eta = \frac{2}{\pi} R.$$

Surface latérale d'un tore (fig. 59, *b*).

$$S_{lat} = 2\pi\eta \cdot 2\pi r = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

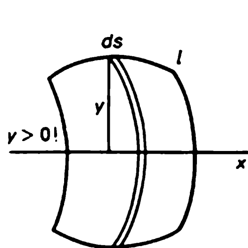


Fig. 57

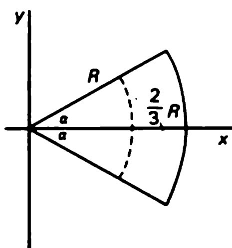


Fig. 58

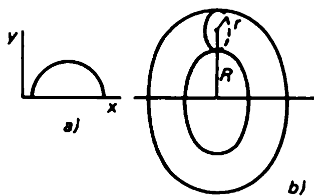


Fig. 59

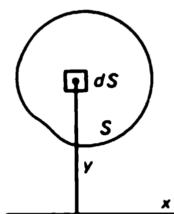


Fig. 60

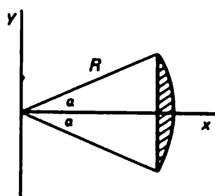


Fig. 61

2. $dU = d\sigma \cdot 2\pi y$, $U = 2\pi \int y \, d\sigma = 2\pi \eta S$.

Le volume d'un corps de révolution est égal au produit de la longueur $2\pi\eta$ du cercle décrit par le centre de masse par l'aire S (fig. 60).

Centre de masse d'un demi-disque.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi\eta \cdot \frac{\pi R^2}{2}, \quad \eta = \frac{4}{3\pi} R.$$

Centre de masse d'un secteur circulaire (fig. 58).

$$\xi = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Centre de masse d'un segment circulaire (fig. 61).

$$\xi = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

§ 5. Principe des déplacements virtuels

70. Système mécanique. On appelle *système mécanique* un ensemble de points matériels choisis aux fins d'étude et satisfaisant à un certain critère. Exemples de systèmes mécaniques : système Solaire, mécanismes, machi-

nes, fusées. Dans ce dernier cas, le système est défini par une certaine surface de contrôle sous laquelle sont disposées les masses appartenant au système. La surface de contrôle est l'enveloppe de la fusée et la surface de l'ouverture de la tuyère à réaction. Pendant le vol de la fusée les gaz s'écoulent dans le milieu environnant ; le système perd une partie de sa masse et illustre le cas des systèmes à masse variable.

71. Liaisons. Les mouvements des différents points d'un système peuvent être limités par des *liaisons.*

Exemple 1. Un point libre peut effectuer trois déplacements le long des axes x, y, z et son mouvement n'est soumis à aucune contrainte.

Exemple 2. Un point est contraint à rester sur une surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 ;$$

son mouvement n'est donc pas libre puisqu'il ne peut se déplacer que sur la surface de la sphère sans pouvoir aller sur le rayon.

Exemple 3. Le point est assujetti dans une cavité sphérique :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2.$$

C'est un exemple de liaison unilatérale, non contraignante et libératrice. Dans les problèmes relatifs au mouvement et à l'équilibre en présence de liaisons unilatérales on cherche toujours des déplacements qui satisfont aux égalités à l'instant considéré car si les conditions se ramènent à des inégalités, les liaisons qui limitent le mouvement des points cessent de s'exercer.

Exemple 4. Cas d'un corps solide : n points ($i = 1, \ldots, n$), les distances entre lesquels restent constantes :

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= r_{12}^2, \\
(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 &= r_{23}^2, \\
(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 &= r_{31}^2 ;
\end{aligned}$$

pour les autres $n - 3$ points on dispose de $3(n - 3)$ conditions exprimant que les distances sont constantes :

$$r_{i1},\ r_{i2},\ r_{i3} \quad (i = 4, \ldots, n) ;$$

au total

$$3(n - 3) + 3 = 3n - 6$$

conditions, i.e. le corps possède six déplacements libres.

Exemple 5. Cas général — les restrictions au mouvement des points du système s'expriment par les équations indépendantes

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Si $s = 3n$, ces équations déterminent $3n$ coordonnées ; le système peut occuper une ou plusieurs positions déterminées mais ne se déplacera pas.

Pour que le système puisse se déplacer il faut que $k = 3n - s > 0$; k est le nombre de degrés de liberté.

72. Méthode de Lagrange de définition des liaisons :

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_k), \quad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_k),$$
$$z_i = z_i(q_1, \ldots, q_k) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

où $q_1, \ldots, q_k$ désignent des paramètres indépendants que l'on appelle coordonnées de Lagrange. Leur élimination doit toujours conduire aux équations des liaisons

$$f_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, 3n - k = s).$$

73. Déplacement virtuel. Travail des forces correspondant à un déplacement virtuel. Soit M un point matériel auquel est appliquée la force **F**. Supposons que l'on communique à ce point un déplacement infiniment petit $\overline{MM'}$ compatible avec les liaisons ; ce déplacement est appelé *déplacement virtuel* pour le distinguer d'un *déplacement réel* que le point effectue réellement sous l'action des forces appliquées.

On appelle *travail élémentaire* de la force **F** sur un déplacement virtuel $\overline{MM'}$ la quantité

$$(\mathbf{F}, \overline{MM'}) = F \cdot MM' \cos (\mathbf{F}, \overline{MM'}).$$

On désigne le déplacement virtuel $\overline{MM'}$ par $\delta \mathbf{s}$; les projections du vecteur $\delta \mathbf{s}$ sont désignées par δx, δy, δz, où x, y, z sont les coordonnées du point M. Les quantités infiniment petites repérées par le symbole δ seront appelées *variations* pour les distinguer des différentielles. En notant X, Y, Z les projections de la force **F**, l'expression analytique du travail de la force **F** sur un déplacement virtuel $\delta \mathbf{s}$ sera la suivante :

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Si le déplacement virtuel $\delta \mathbf{s}$ s'effectue dans le temps δt, le vecteur

$$\mathbf{v} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}$$

sera appelé vitesse virtuelle du point M. La définition du travail élémentaire de la force **F** sur un déplacement virtuel $\overline{MM'}$ doit comporter : la force **F** appliquée au point M et le déplacement virtuel $\overline{MM'}$. Cela n'implique aucune hypothèse relative à l'action de la force dans la nouvelle position du point matériel.

La notion de travail d'une force sans indication du déplacement, même s'il s'agit d'un déplacement réel, reste imprécise dans de nombreux cas.

Exemples. Un corps pesant effectue une translation réelle $\overline{MM'}$ en décollant de la table (fig. 62). Que représente le travail réel de la force de

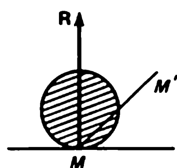


Fig. 62

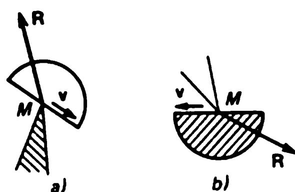


Fig. 63

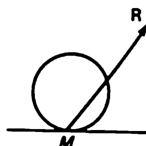


Fig. 64

réaction **R** si la réaction disparaît dès que le corps M décolle de la table ?

Le corps représenté sur la figure 63, *a* glisse avec une vitesse **v** sur la pointe fixe M. Que doit-on entendre par travail réel de la réaction **R** si le point d'application de **R** se trouve en un même point M de l'espace fixe, tandis que le point du corps (qui se trouvait en M) se déplace et la force de réaction cesse de lui être appliquée au cours du déplacement ? (Dans le problème inversé (fig. 63, *b*) la situation est évidente.)

Un cylindre roule sans glisser sur une surface rugueuse (fig. 64). Que faut-il entendre par travail réel de la réaction **R** si la vitesse réelle du point de contact du cylindre M est nulle ?

Si le travail de la force X, Y, Z sur un déplacement virtuel δx, δy, δz représente la variation d'une fonction $U(x, y, z)$:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta U(x, y, z),$$

$U(x, y, z)$ porte le nom de *fonction des forces*. On a alors

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Si la fonction des forces U existe, on peut écrire

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

et inversement. Les surfaces $U = \text{const}$ sont appelées *surfaces de niveau*. La force **F** agit suivant la normale à la surface de niveau dans le sens de la croissance de la fonction des forces U.

74. Principe des déplacements virtuels. Considérons un système de points x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) sur lesquels s'exercent des forces données X_ν, Y_ν, Z_ν. On supposera que les points sont soumis à des liaisons. Soient δx_ν, δy_ν, δz_ν les déplacements virtuels du ν-ième point.

Nous postulons l'*axiome des liaisons* : l'action des liaisons imposées à un système matériel peut être remplacée par l'action des *forces de réaction* $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ ($\nu = 1, \ldots, n$).

En qualité de corollaire on peut affirmer que si on ajoute aux forces s'exerçant sur un système mécanique les forces de réaction $\mathbf{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), on peut poser que le système est dépourvu des liaisons déterminant les réactions $\mathbf{R}_\nu$.

Dans ce qui suit on n'aura affaire qu'à des liaisons *parfaites* vérifiant la définition suivante : *le travail des forces de réaction* $\mathbf{R}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) *des liaisons parfaites correspondant à n'importe quels déplacements virtuels est égal à zéro* :

$$\sum_\nu (R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu) = 0. \tag{3.1}$$

La définition des liaisons de retenue parfaites représente une généralisation de faits physiques connus. Ces liaisons ne dissipent aucune énergie dans les déplacements virtuels. On en déduit facilement le principe fondamental de la statique pour les systèmes à liaisons parfaites stationnaires. En effet, ajoutons aux forces données X_ν, Y_ν, Z_ν toutes les forces de réaction $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$; selon l'axiome des liaisons on peut assimiler notre système mécanique à un système de points absolument libres soumis à l'action des forces $X_\nu + R_{\nu x}$, $Y_\nu + R_{\nu y}$, $Z_\nu + R_{\nu z}$. Les points absolument libres vérifient les équations d'équilibre suivantes :

$$X_\nu + R_{\nu x} = 0, \quad Y_\nu + R_{\nu y} = 0, \quad Z_\nu + R_{\nu z} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

A l'aide de ces équations d'équilibre on peut déterminer les forces de réaction inconnues $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) et porter leurs valeurs dans l'expression du travail des réactions des liaisons parfaites ; on obtient ainsi la relation

$$\sum (X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu) = 0 \tag{3.3}$$

qui est valable *pour déplacements virtuels arbitraires* δx, δy, δz *dans la position d'équilibre du système mécanique considéré.*

Nous avons démontré que la relation (3.3) est nécessaire pour que le système soit à l'équilibre. Nous allons démontrer que cette relation est suffisante, autrement dit, nous devons démontrer qu'un système mécanique de vitesse nulle et se trouvant dans une position satisfaisant à la relation (3.3) sera immobile.

Supposons que dans une certaine position du système matériel M_ν l'équation (3.3) est vérifiée. Il faut démontrer que dans cette position le système sera en état d'équilibre, c.-à-d. que la résultante des forces $\mathbf{F}_\nu$ et $\mathbf{R}_\nu$ appliquées au point M_ν sera nulle en n'importe quel point du système ($\nu = 1, \ldots, n$).

Supposons le contraire, c.-à-d. qu'un point M_ν au moins, placé dans cette position sans vitesse initiale, sera animé de mouvement. Le point M_ν

pourra alors se déplacer conformément à ses liaisons suivant la résultante des forces $\mathbf{F}_\nu$ appliquées et des forces de réaction $\mathbf{R}_\nu$ des liaisons, à condition que la vitesse initiale du point M_ν soit nulle. Le travail des forces $(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu)$ sur un déplacement élémentaire réel du point M_ν (dx_ν, dy_ν, dz_ν) sera positif si le point M_ν se déplace réellement (résultat valable pour tous les points du système). Par conséquent, le travail total des forces $\mathbf{F}_\nu$ et des forces de réaction $\mathbf{R}_\nu$ données au cours d'un déplacement réel doit être positif si le système était initialement au repos. En effet, le mouvement des points du système matériel devrait alors s'effectuer conformément aux liaisons auxquelles il est assujetti. Or cela implique que les déplacements dx_ν, dy_ν, dz_ν qui se manifesteraient, devraient faire partie des déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν. On aura alors

$$\sum[(X_\nu + R_{\nu x})dx_\nu + (Y_\nu + R_{\nu y})dy_\nu + (Z_\nu + R_{\nu z})dz_\nu] > 0,$$

puisque avec $v_\nu(t) = 0$

$$\mathbf{j}_\nu = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}_\nu(t + \Delta t) - \mathbf{v}_\nu(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu}{m},$$

d'où

$$(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \mathbf{v}_\nu(t + dt)dt) = \frac{dt^2}{m}(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu)^2.$$

Or par définition de la liaison parfaite on doit avoir

$$\sum(R_{\nu x}dx_\nu + R_{\nu y}dy_\nu + R_{\nu z}dz_\nu) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\sum(X_\nu dx_\nu + Y_\nu dy_\nu + Z_\nu dz_\nu) > 0,$$

ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle la relation (3.3) s'applique à n'importe quel déplacement virtuel.

On en conclut que la relation (3.3) est nécessaire et suffisante pour qu'un système soit en équilibre. C'est pour cela que la relation (3.3) exprime un principe que l'on appelle *principe des déplacements virtuels*. Ce principe a été établi par Bernoulli*).

Le principe des déplacements virtuels constitue la base d'une méthode générale de résolution des problèmes de statique. Comme les réactions n'y figurent pas, il permet de trouver la solution des problèmes de statique en

*) Pour qu'un système soit en équilibre il est nécessaire et suffisant qu'au cours de tout déplacement virtuel d'un système la somme de travaux élémentaires de forces mises en jeu soit nulle.

évitant le calcul des réactions inconnues des liaisons auxquelles est assujetti le système mécanique.

Exemple 1. Le palan (fig. 65) est une machine très ancienne utilisée pour le levage d'objets pesants ; il se compose de deux trains de trois moufles pouvant tourner librement autour d'axes horizontaux ; le train supérieur est fixé en haut à un support fixe tandis que le train inférieur supporte la charge Q. Sur les jantes des moufles on fait passer une corde ; on exerce un effort de traction P sur l'extrémité libre de la corde pour soulever le fardeau ; l'autre extrémité de la corde est attachée au train fixe. Déterminer le rapport des forces P et Q à l'équilibre.

Du point de vue de la statique analytique, le palan est un système mécanique composé de deux points auxquels sont appliquées les forces P et Q. Tout le reste sert à établir une liaison entre ces deux points. En appliquant le principe des déplacements virtuels à la position d'équilibre on a

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0,$$

où δp et δq désignent les déplacements virtuels des points d'application des forces P et Q. Le déplacement est considéré comme positif s'il a lieu dans le sens de la force concernée. Si le fardeau Q s'élève d'une distance $-\delta q$, la marque horizontale AB, indissolublement liée au train inférieur des moufles, s'élèvera jusqu'à la position $A'B'$, ce qui implique que les six segments de corde compris entre AB et $A'B'$ doivent être retirés du palan :

$$\delta p = -6\delta q.$$

En portant cette valeur de δp dans l'expression du principe des déplacements virtuels on trouve $P = Q/6$.

Exemple 2. La partie principale de la poulie différentielle de Weston est constituée de deux roues à gorge liées A dont l'axe commun est suspendu à un crochet fixe (fig. 66). Les gorges sont dentées afin de pouvoir faire tourner la poulie double à l'aide d'une chaîne sans fin à deux boucles, dont l'une supporte la poulie mobile B. On suspend à la poulie mobile le fardeau Q à soulever. A la boucle libre passant par la grande roue on applique l'effort de traction P. Les rayons des roues A de la poulie double sont R et r, avec $r < R$. En négligeant le frottement, déterminer la dépendance de l'effort P par rapport au poids du fardeau Q. Le système se compose de deux points d'application des forces données P et Q. Tout le reste est destiné à réaliser une liaison parfaite entre ces points. Appliquons le principe des déplacements virtuels :

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0\,;$$

δp et δq sont les valeurs algébriques des déplacements virtuels des points d'application des forces correspondantes P et Q ; les déplacements sont

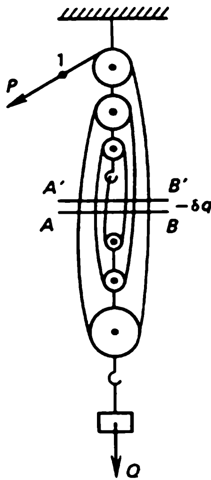


Fig. 65

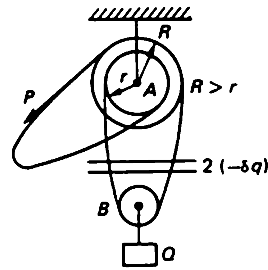


Fig. 66

considérés comme positifs s'ils se produisent dans le sens des forces correspondantes et comme négatifs dans le cas contraire. Lorsque le fardeau Q s'élève de $-\delta q$, on doit retirer de la boucle chargée une longueur égale à $-2\delta q$. Or lorsqu'on déplace la chaîne de δp, la longueur de la boucle libre augmente de δp et diminue, à la suite du déplacement en sens inverse assuré par la petite roue, de la longueur $r\,\frac{\delta p}{R}$. On en déduit l'égalité

$$\delta p - \frac{r}{R}\,\delta p = -2\delta q.$$

En portant ce résultat dans la relation exprimant le principe des déplacements virtuels on obtient

$$P = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) Q.$$

Exemple 3. On appelle machines simples les systèmes mécaniques à liaisons complètes en ce sens que les positions de toutes leurs parties sont complètement déterminées par la position de l'un de leurs points, ce point ne pouvant se déplacer que suivant une certaine courbe. En conséquence, la position d'une machine simple peut être déterminée à l'aide d'un seul paramètre caractérisant la position du point de référence sur sa trajectoire.

Considérons une machine simple soumise à l'action de deux forces : d'une « force motrice » P appliquée au point A et d'une « force de résistance » Q appliquée au point B. Posons que les forces P et Q sont dirigées suivant les tangentes aux trajectoires de leurs points d'application A et B respectivement. Notons δp, δq les déplacements virtuels des points A et B définis algébriquement.

La condition d'équilibre de la machine s'exprime par la relation

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0.$$

Si on pose que le déplacement virtuel s'effectue dans le temps δt, les quantités $\delta p/\delta t = u$ et $\delta q/\delta t = v$ représentent les vitesses virtuelles des points A, B d'application des forces le long de leurs trajectoires. Le principe des déplacements virtuels donne

$$Pu + Qv = 0,$$

soit

$$\frac{P}{Q} = -\frac{v}{u},$$

autant gagne-t-on en force, autant on perd en vitesse.

Au nombre de machines simples on trouve : le levier, le coin, le treuil, le palan, la vis dans un écrou fixe, etc.

Exemple 4. Principe de Torricelli : dans un système de corps pesants à l'équilibre, le centre de masse se situe dans une position aussi basse que possible.

Nous allons démontrer que le centre de masse d'un système de corps pesants se trouvant en équilibre se situe dans une position extrême et nous remettrons à plus tard la démonstration de la seconde partie du principe de Torricelli, car il nous faudra d'abord prendre connaissance du théorème de Lagrange sur la stabilité de la position d'équilibre lorsque la fonction des forces est maximale. Orientons l'axe z suivant la verticale ascendante. Le principe des déplacements virtuels appliqué à l'équilibre d'un système de corps de masses m_ν et de coordonnées x_ν, y_ν, z_ν s'écrit sous la forme

$$-\sum m_\nu g \delta z_\nu = 0,$$

où g est l'accélération de la pesanteur. En définissant la coordonnée du centre de masse sur l'axe z

$$\zeta = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{\sum m_\nu},$$

on peut récrire notre principe sous la forme suivante :

$$\delta\zeta = 0.$$

Cette égalité démontre que le centre de masse des corps pesants se trouvant à l'équilibre avec des liaisons parfaites occupe sur la verticale une position extrême.

Exemple 5. Considérons un problème que l'on traite généralement par les procédés fondés sur la statique élémentaire. Une barre homogène AB de longueur $2l$ et de poids P peut tourner autour de l'extrémité A (fig. 67). La barre AB prend appui sur une barre homogène CD de même longueur $2l$ pouvant tourner autour de son milieu E. Les points A et E se situent sur la même verticale à la distance $AE = l$ l'un de l'autre. A l'extrémité D est suspendu un poids $Q = 2P$. Déterminer l'angle φ que fait la barre AB avec la verticale à l'état d'équilibre en négligeant le frottement. Le système se compose de deux points auxquels sont appliquées les forces P et Q, tout le reste assure la réalisation d'une liaison, postulée parfaite, entre ces points.

Introduisons les axes de coordonnées Axy comme représenté sur la figure. Le principe des déplacements virtuels fournit la relation suivante :

$$P\,\delta x_M + Q\,\delta x_D = 0,$$

mais

$$x_M = l\cos\varphi, \quad x_D = l + l\cos(\pi - 2\varphi) = l(1 - \cos 2\varphi).$$

On en tire

$$\delta x_M = -l\sin\varphi\,\delta\varphi, \quad \delta x_D = 2l\sin 2\varphi\,\delta\varphi.$$

En portant ces valeurs dans le principe des déplacements virtuels, il vient

$$\sin\varphi(8\cos\varphi - 1) = 0.$$

Il existe deux solutions : $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1/8$.

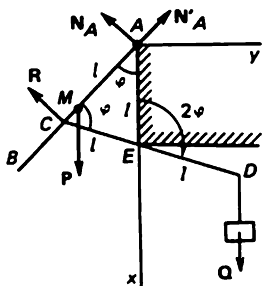


Fig. 67

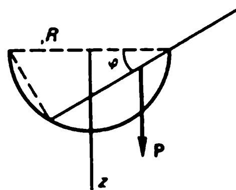


Fig. 68

Exemple 6. Une barre homogène de longueur $2l$ et de poids P repose dans une coupe hémisphérique de rayon R. Trouver l'angle φ que fait la barre avec l'horizontale à l'état d'équilibre. On négligera le frottement.

Orientons l'axe z suivant la verticale descendante (fig. 68). La coordonnée du centre de gravité de la barre est

$$z = (2R\cos\varphi - l)\sin\varphi.$$

Selon le principe de Torricelli on a $\delta z = 0$, d'où l'angle φ se trouve défini par l'équation

$$(2R\cos\varphi - l)\cos\varphi - 2R\sin^2\varphi = 0.$$

§ 6. Les liaisons et les déplacements virtuels

75. Les liaisons de retenue, ou bilatérales, appliquées aux points x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) d'un système mécanique sont décrites par le système d'équations

$$f_j(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m < 3n)\ ;$$

les f_j sont fonctionnellement indépendants.

La position virtuelle infiniment proche du système mécanique, caractérisée par les valeurs des coordonnées $x_\nu + \delta x_\nu$, $y_\nu + \delta y_\nu$, $z_\nu + \delta z_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), ne doit pas affecter les liaisons auxquelles est assujetti le système

$$f_j(x_\nu + \delta x_\nu, y_\nu + \delta y_\nu, z_\nu + \delta z_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

En développant les premiers membres de ces équations en séries de Taylor et en se limitant à la première approximation, on aura

$$\delta f_j = \sum \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}\,\delta z_\nu \right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Le nombre de variables indépendantes $k = 3n - m$ est appelé *nombre de degrés de liberté* du système mécanique.

Les liaisons peuvent être décrites par un système d'équations

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_k), \quad y_\nu = y_\nu(q_1, \ldots, q_k),$$
$$z_\nu = z_\nu(q_1, \ldots, q_k) \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

On supposera que les variables $q_1, \ldots, q_k$ sont réelles et indépendantes ; leurs valeurs numériques déterminent la position du système. Ces variables q_s sont dites coordonnées de Lagrange généralisées déterminantes (ou holonomes). Les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν correspondant aux variations infiniment petites δq_s des variables déterminantes s'obtiennent par la varia-

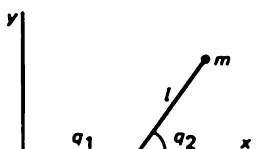


Fig. 69

tion des équations de liaison

$$\delta x_\nu = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\,\delta q_s, \quad \delta y_\nu = \sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}\,\delta q_s,$$

$$\delta z_\nu = \sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\,\delta q_s \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Exemple. Le système d'équations

$$x = q_1 + l\cos q_2, \quad y = l\sin q_2, \quad z = 0$$

représente un système à deux degrés de liberté (fig. 69).

Les liaisons peuvent être définies cinématiquement à l'aide de relations auxquelles doivent satisfaire les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons. Par exemple, pour un corps solide, les vitesses virtuelles doivent, en vertu du théorème d'Euler, vérifier les relations suivantes :

$$\delta x_\nu = [u + qz_\nu - ry_\nu]\,\delta t, \quad \delta y_\nu = [v + rx_\nu - pz_\nu]\,\delta t,$$
$$\delta z_\nu = [w + py_\nu - qx_\nu]\,\delta t \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

où u, v, w sont les vitesses virtuelles de l'origine des coordonnées et p, q, r les vitesses angulaires virtuelles de rotation autour des axes de coordonnées. Sous forme vectorielle ses relations s'écrivent

$$\delta\mathbf{r}_\nu = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\nu)\,\delta t,$$

où $\mathbf{r}_\nu$ désigne les rayons-vecteurs des points du solide, $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse virtuelle du point qui se trouve à l'instant considéré à l'origine des coordonnées, $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire instantanée virtuelle du corps solide.

76. Equations d'équilibre d'un corps solide libre. Considérons un corps solide dont les points M_ν définis par les rayons-vecteurs $\mathbf{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) sont soumis à l'action des forces $\mathbf{F}_\nu$. Si ce corps est en équilibre, on doit avoir, conformément au principe des déplacements virtuels :

$$\sum(\mathbf{F}_\nu,\ \delta\mathbf{r}_\nu) = 0.$$

En y portant les valeurs

$$\delta \mathbf{r}_\nu = (\mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_\nu)\delta t,$$

on aura

$$\delta t \sum (\mathbf{F}_\nu, \ \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_\nu) = 0,$$

et

$$\left(\mathbf{v}, \ \sum \mathbf{F}_\nu\right) + \left(\mathbf{\Omega}, \ \sum (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu)\right) = 0.$$

La vitesse de translation **v** et la vitesse **Ω** d'une rotation virtuelle sont arbitraires ; or une expression linéaire par rapport à **v** et **Ω** arbitraires ne peut être nulle que si

$$\sum \mathbf{F}_\nu = 0, \quad \sum (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu) = 0.$$

Dans ces équations d'équilibre du corps solide on retrouve les équations connues de la statique géométrique.

77. Les équations de Lagrange. Si les liaisons sont données en fonction des variables de Lagrange $q_1, \ldots, q_k$ sous la forme

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_k), \quad y_\nu = y_\nu(q_1, \ldots, q_k),$$
$$z_\nu = z_\nu(q_1, \ldots, q_k) \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

les équations d'équilibre de tels systèmes peuvent être déduites du principe des déplacements virtuels

$$\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = 0,$$

où on substituera les valeurs explicites des déplacements virtuels

$$\delta x_\nu = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_\nu = \sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} \delta q_s,$$
$$\delta z_\nu = \sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \delta q_s \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

On obtient ainsi

$$\sum \delta q_s \sum \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right) = 0.$$

En utilisant les notations des forces généralisées

$$Q_s = \sum \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right),$$

le principe des déplacements virtuels se réduit à la forme

$$\sum Q_s \delta q_s = 0.$$

Si les variables q_s sont telles que les δq_s ($s = 1, \ldots, k$) peuvent être arbitraires, positifs ou négatifs ($\delta q_s \gtreqless 0$), la dernière relation, qui est linéaire et homogène par rapport à des δq_s arbitraires, ne peut être valable que si tous les coefficients Q_s auprès des δq_s arbitraires seront nuls :

$$Q_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Ce sont les équations d'équilibre de Lagrange.

Signification des Q_s. Posons qu'une des variables q_s varie de la quantité δq_s. Le travail des forces considérées lors de ce déplacement est égal à

$$\delta A_s = Q_s \delta q_s,$$

d'où

$$Q_s = \frac{\delta A_s}{\delta q_s}.$$

Si les forces admettent une fonction des forces U :

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu},$$

l'expression de la force généralisée possède une signification fort simple

$$Q_s = \sum \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, k);$$

la fonction des forces prend une valeur extrémale dans la position d'équilibre.

Exemple 1. A l'aide du cabestan représenté sur la figure 70 on assure le levage du poids R. Déterminer l'effort P qu'il faut appliquer aux manivelles du cabestan pour équilibrer le poids R, sachant que la longueur de la manivelle est l et le rayon du tambour du cabestan est r. Ce système possède un degré de liberté. Adoptons en qualité de coordonnée déterminante l'angle de rotation φ. Le travail élémentaire des forces produit sur un déplacement virtuel $\delta\varphi$ est égal à

$$\delta A_\varphi = 2Pl\delta\varphi + R\delta s = (2Pl - rR)\delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi,$$

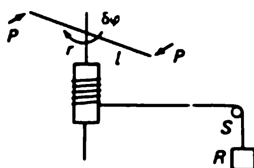


Fig. 70

d'où $Q_\varphi = 2Pl - rR$. L'équation d'équilibre $Q_\varphi = 0$ donne

$$P = \frac{rR}{2l}.$$

Supposons que parmi les déplacements virtuels du système figure la rotation $\delta\varphi$ autour de l'axe z comme si le système constituait un corps solide. Pour ce déplacement virtuel

$$\begin{pmatrix} \delta x_\nu \\ \delta y_\nu \\ \delta z_\nu \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \delta\varphi \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{Vmatrix}.$$

Le travail des forces sur le déplacement virtuel $\delta\varphi$ est égal à

$$\delta A_\varphi = \sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = \delta\varphi \sum (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu) = M_z \delta\varphi,$$

d'où

$$Q_\varphi = M_z.$$

Exemple 2. Quel effort devra-t-on appliquer à la jante du rouleau de rayon r représenté sur la figure 71 pour équilibrer le couple de forces de moment M appliqué au rouleau ?

Parmi les déplacements virtuels du système on trouve sa rotation en tant que corps solide autour de son axe. Il s'ensuit que

$$\delta\varphi Q_\varphi = \delta\varphi M - rR\delta\varphi, \quad Q_\varphi = M - Rr.$$

L'équation d'équilibre $Q_\varphi = 0$ implique que $R = M/r$.

Exemple 3. Deux barres pesantes et homogènes de longueur $2a$ et de poids P sont liées par articulation et placées sur un cylindre lisse de rayon r comme représenté sur la figure 72. Déterminer la position d'équilibre des barres.

On a $z = a \cos\theta - \dfrac{r}{\sin\theta}$. Le travail des forces sur un déplacement éventuel est égal à

$$\delta A = -2P\delta z = 2P\left(a \sin\theta - \frac{r\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\delta\theta,$$

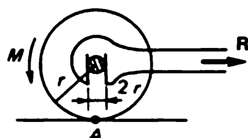


Fig. 71

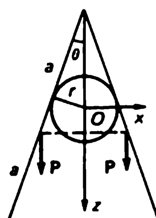


Fig. 72

d'où

$$Q_\theta = 2P\left(a \sin\theta - \frac{r\cos\theta}{\sin^2\theta}\right), \quad Q_z = -2P.$$

L'équation de l'équilibre est : $Q_\theta = 0$ et non pas $Q_z = 0$. La raison en est que z ne satisfait pas aux conditions imposées aux variables q dans la démonstration des équations d'équilibre de Lagrange. C'est précisément à l'équilibre que $\delta z = 0$ et pour les déplacements virtuels à partir de la position d'équilibre $\delta z < 0$. La coordonnée θ vérifie la condition $\delta\theta \lesseqgtr 0$ pour toutes les valeurs de θ, y compris à l'équilibre.

78. Equations d'équilibre avec multiplicateurs. Soit un système dont les points x_ν, y_ν, z_ν sont soumis à des forces données caractérisées par leurs projections X_ν, Y_ν, Z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) et qui est assujetti à des liaisons de retenue

$$f_j(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν compatibles avec les liaisons vérifient les équations

$$\sum\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{3.4}$$

On supposera que les fonctions f_j sont indépendantes, ce qui implique que la matrice $\left\|\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}, \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}, \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}\right\|$ possède au moins un déterminant Δ d'ordre m différent de zéro ; les variables x_ν, y_ν, z_ν par rapport auxquelles s'effectue la dérivation dans ce déterminant seront appelées *variables dépendantes* et toutes les autres *indépendantes*. On peut résoudre les équations (3.4) par rapport aux variations des variables dépendantes.

A l'équilibre on doit avoir la relation

$$\sum(X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu) = 0.$$

Multiplions les relations (3.4) par des facteurs indéterminés λ_j et additionnons-les à la relation du principe des déplacements virtuels, on obtient alors

$$\sum \left[\left(X_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \right) \delta x_\nu + \left(Y_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} \right) \delta y_\nu + \left(Z_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \right) \delta z_\nu \right] = 0.$$

Choisissons les λ_j tels que soient éliminés les coefficients auprès des variations des variables dépendantes. Cela est parfaitement réalisable puisque le déterminant composé des coefficients affectant les λ_j sera précisément le Δ différent de zéro. Avec ces valeurs des λ_j, ne subsistent dans l'expression ci-dessus que les variations des variables indépendantes ; comme elles sont arbitraires, il ressort de la relation ci-dessus qu'à l'équilibre les coefficients auprès des variations des variables indépendantes seront eux aussi éliminés. Autrement dit, à l'équilibre, tous les coefficients doivent disparaître :

$$X_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} = 0, \quad Y_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} = 0,$$

$$Z_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

A ces équations on doit adjoindre les équations définissant les liaisons $f_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. On aura au total $3n + m$ équations servant au calcul de $3n + m$ variables x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$, λ_j $(j = 1, \ldots, m)$.

79. Liaisons unilatérales. Considérons le point matériel $m(x, y, z)$ qui est attaché par un fil inextensible de longueur l à l'origine O d'un système de coordonnées (fig. 73). Le domaine des positions virtuelles du point m est défini par l'inégalité

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leqslant 0.$$

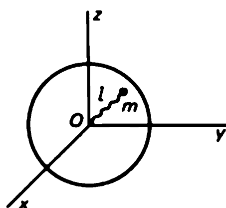


Fig. 73

Le fil sera soumis à une tension si cette expression est égale à zéro.

Si le fil n'est pas tendu, il n'exerce aucun effort sur le point m et on peut donc le négliger.

Lorsque le fil est tendu, il exerce sur le point m une force de réaction orientée suivant le fil tendu vers le point O et dont les projections sur les axes sont R_x, R_y, R_z ; les déplacements virtuels du point m doivent donc satisfaire à l'expression

$$R_x\delta x + R_y\delta y + R_z\delta z \geqslant 0.$$

L'inégalité correspond au cas où les déplacements virtuels δx, δy, δz du point m ont lieu à l'intérieur de la sphère.

Dans le cas général d'un système mécanique assujetti à des liaisons unilatérales, nous généraliserons l'exemple élémentaire que nous venons de donner.

Posons que les points x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) d'un système mécanique sont assujettis à des liaisons qui s'expriment par les inégalités

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \leqslant 0.$$

Dans la position considérée du système mécanique on n'aura à tenir compte que des liaisons soumises à des tensions, celles qui correspondent au signe d'égalité, car les liaisons qui ne sont pas soumises à des tensions n'apportent aucune restriction aux mouvements du système. De toutes les liaisons tendues il suffit de considérer celles qui sont indépendantes. Posons que pour les liaisons indépendantes se trouvant en état de tension $j = 1, \ldots, m$. Les déplacements virtuels vérifient les inégalités

$$\delta f_j = \sum \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) \leqslant 0.$$

On définira les liaisons unilatérales parfaites par l'inégalité

$$\sum (R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu) \geqslant 0.$$

L'égalité à zéro correspond uniquement aux déplacements pour lesquels $\delta f_j = 0$ ($j = 1, \ldots, m$).

A l'équilibre

$$X_\nu + R_{\nu x} = 0, \quad Y_\nu + R_{\nu y} = 0, \quad Z_\nu + R_{\nu z} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Ayant déterminé les réactions $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$, on les porte dans l'inégalité caractérisant les liaisons unilatérales parfaites et on trouve

$$\delta A = \sum (X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu) \leqslant 0. \tag{3.5}$$

L'égalité à zéro s'applique aux déplacements maintenant les liaisons à l'état de tension $\delta f_j = 0$ ($j = 1, \ldots, m$).

Formons l'expression

$$\delta A + \sum \lambda_j \delta f_j = \sum \left[\left(X_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \right) \delta x_\nu + \left(Y_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} \right) \delta y_\nu + \left(Z_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \right) \delta z_\nu \right].$$

Parmi les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν il en est qui maintiennent les liaisons sous tension, $\delta f_j = 0$ ($j = 1, \ldots, m$) ; en appliquant à ces derniers le principe $\delta A = 0$, on arrive à la conclusion qu'à l'équilibre les équations suivantes doivent être nécessairement vérifiées :

$$X_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} = 0, \quad Y_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} = 0, \qquad Z_\nu + \sum \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.6}$$

les liaisons étant soumises à des tensions : $f_j = 0$ ($j = 1, \ldots, m$).

D'après (3.5), on constate que pour les liaisons unilatérales les réactions sont déterminées comme pour les liaisons de retenue.

En vertu de (3.6) on peut écrire

$$\delta A + \sum \lambda_j \delta f_j = 0$$

d'où en vertu du principe (3.5)

$$\sum \lambda_j \delta f_j = -\delta A \geqslant 0.$$

Pour les déplacements vérifiant l'inégalité $\delta f_j < 0$ (les autres $\delta f_s = 0, s \neq j$), on a

$$\lambda_j \delta f_j > 0 \quad (j = 1, \ldots, m),$$

ou

$$\lambda_j < 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Ce sont des conditions supplémentaires caractérisant les positions d'équilibre vraies du système.

Exemple.

$$f_1 = y - x \leqslant 0, \quad f_2 = x^2 + y^2 - R^2 \leqslant 0,$$

$$X = 0, \quad Y = -mg.$$

1. Hypothèse : les deux liaisons sont à l'état de tension ;

$$-\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x = 0, \quad y - x = 0,$$
$$-mg + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

On a $-mg + 2\lambda_1 = 0$, d'où $\lambda_1 = mg/2 > 0$, ce qui ne satisfait pas aux conditions supplémentaires.

2. Une seule liaison est tendue : $y - x = 0$;

$$-\lambda_1 = 0, \quad -mg + \lambda_1 = 0 ;$$

d'où $\lambda_1 = mg > 0$, résultat qu'il faut rejeter comme ne satisfaisant pas aux conditions supplémentaires.

3. Seule la seconde liaison est tendue : $x^2 + y^2 - R^2 = 0$,

$$2\lambda_2 x = 0, \quad -mg + 2\lambda_2 y = 0 ;$$

d'où $x = 0$, $y = \pm R$, $\lambda_2 = \dfrac{mg}{2y} = \dfrac{mg}{\pm 2R}$; λ_2 doit être négatif, $y = -R$, $\lambda_2 = -\dfrac{mg}{2R} < 0$.

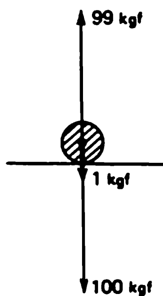


Fig. 74

Problème. Un pavé pesant 1 kgf repose sur une table horizontale lisse. Déterminer la réaction de la table (fig. 74).

Ajoutons 99 kgf dirigés suivant la verticale ascendante et descendante. Les forces de 100 kgf se détruisent par la liaison unilatérale et ne subsiste que la force de 99 kgf dirigée vers le haut. Où est l'erreur ?

Les réactions des liaisons unilatérales doivent-elles être évaluées comme dans le cas des liaisons de retenue ?

80. Détermination des réactions. Le principe des déplacements virtuels permet de calculer les réactions des liaisons. En effet, associons aux forces données X_ν, Y_ν, Z_ν toutes les forces de réaction $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ et posons que le système est libre et se trouve soumis à l'action des forces $X_\nu + R_{\nu x}$, $Y_\nu + R_{\nu y}$, $Z_\nu + R_{\nu z}$.

En appliquant le principe des déplacements virtuels on obtient

$$\sum [(X_\nu + R_{\nu x})\delta x_\nu + (Y_\nu + R_{\nu y})\delta y_\nu + (Z_\nu + R_{\nu z})\delta z_\nu] = 0.$$

Pour des points libres δx_ν, δy_ν, δz_ν sont tout à fait arbitraires. On en tire les équations d'équilibre

$$X_\nu + R_{\nu x} = 0, \quad Y_\nu + R_{\nu y} = 0, \quad Z_\nu + R_{\nu z} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

d'où on tire les réactions $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$.

Pour les besoins pratiques c'est la méthode de détermination des réactions individuelles qui présente le plus d'intérêt. Afin d'éviter les considéra-

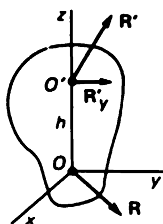


Fig. 75

tions générales, nous expliquerons le procédé de détermination des réactions individuelles à l'aide de quelques exemples.

Exemple 1. Un corps solide composé de points x_ν, y_ν, z_ν possède deux points fixes O et O' (fig. 75). Les points x_ν, y_ν, z_ν sont soumis aux forces X_ν, Y_ν, Z_ν tandis que les points O et O' sont soumis respectivement aux réactions R_x, R_y, R_z et R_x', R_y', R_z'.

Déterminons la réaction R_y', par exemple. Toutes les autres réactions étant maintenues, la réaction R_y' empêche la rotation du corps solide autour de l'axe x. Associons cette réaction R_y' qui nous intéresse aux forces imposées :

$$\sum(X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu) + R_y'\delta y_{O'} = 0\,;$$

à la multitude des déplacements virtuels du système mécanique s'ajoutent maintenant les rotations autour de l'axe x qui étaient interdites. Parmi les déplacements virtuels nous aurons maintenant les suivants :

$$\delta x_\nu = 0, \quad \delta y_\nu = -z_\nu\delta\varphi, \quad \delta z_\nu = y_\nu\delta\varphi,$$

où $\delta\varphi$ est l'angle de la rotation virtuelle autour de l'axe x. En substituant ces valeurs dans la dernière relation il vient

$$\delta\varphi[M_x - R_y'h] = 0, \quad M_x = \sum_\nu(y_\nu Z_\nu - z_\nu Y_\nu),$$

et comme $\delta\varphi$ est arbitraire, on obtient la formule suivante pour le calcul de R_y' :

$$M_x - R_y'h = 0.$$

S'il s'agit de la réaction R_z', on doit tenir compte d'une particularité. L'adjonction de la réaction R_z' aux forces appliquées et le maintien de toutes les autres réactions ne libèrent pas le système car au mouvement de translation le long de l'axe z s'opposent simultanément les réactions R_z et R_z'. Le problème est statiquement indéterminé et le mode d'étude proposé met en évidence les causes de l'indétermination statique.

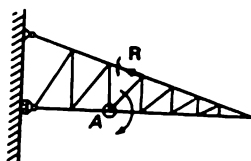


Fig. 76

Exemple 2. Déterminer les réactions dans le problème des deux barres (cf. fig. 67).

1. Rotation autour de A :

$$-R\cdot 2l\cos\varphi + Pl\sin\varphi = 0.$$

2. Rotation autour de C :

$$N_A\cdot 2l\cos\varphi - P(2l\cos\varphi - l)\sin\varphi = 0.$$

3. Translation le long de la barre :

$$N_A' - P\cos\varphi = 0.$$

Exemple 3. Déterminer les efforts dans les barres du treillis (fig. 76). On coupe la barre et on la remplace par la réaction **R**. Après avoir été coupé le treillis devient un mécanisme susceptible de se mouvoir, de tourner autour du point A. Le travail des forces appliquées plus le travail de la réaction **R** est égal à zéro lors de ce déplacement.

On en déduit R.

§ 7. Equilibre du fil

81. Soit un fil inextensible (fig. 77). Le travail élémentaire de la force **F**ds est égal à

$$(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)ds,$$

et le travail total

$$A = \int_0^l (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)ds.$$

Le principe des déplacements virtuels s'écrit sous la forme

$$\int_0^l (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)ds = 0.$$

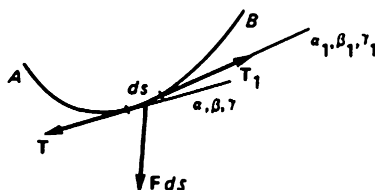


Fig. 77

Les liaisons. Le fil étant inextensible, ds ne varie pas lors d'un déplacement :

$$f \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - ds^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta f \equiv dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z = 0.$$

On cherchera la solution à l'aide du principe des déplacements virtuels par la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\int_0^l \left[(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)ds + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,d\,\delta z\right)\right] = 0.$$

En intégrant par parties, compte tenu de ce que les extrémités A et B du fil sont fixes, on obtient

$$\int_0^l \left\{\left[X\,ds - d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x + \left[Y\,ds - d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)\right]\delta y + \left[Z\,ds - d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z\right\} = 0.$$

Considérons que δz est une variation dépendante. Choisissons $\lambda(s)$ tel que

$$Z\,ds - d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

L'application du principe des déplacements virtuels fournit alors deux autres équations

$$X\,ds - d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) = 0,\quad Y\,ds - d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Précisons la signification de λ. Chaque élément ds du fil est soumis à l'action de trois forces : $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{F}\,ds$ (fig. 77). Les conditions de l'équilibre

de ds sont de la forme

$$-T\alpha + T_1\alpha_1 + X\,ds = 0,$$

ou

$$X\,ds + d(T\alpha) = 0.$$

Mais comme $\alpha = dx/ds$, $\beta = dy/ds$, $\gamma = dz/ds$, on aura

$$X\,ds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,\ Y\,ds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0,\ Z\,ds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

d'où $T = -\lambda$.

Corollaire. Utilisant les formules de Frenet

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\varrho},\quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{\varrho},\quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{\varrho},$$

où α', β', γ' sont les cosinus directeurs de la normale principale, ϱ est le rayon de courbure du fil, on obtient

$$X = -\alpha\frac{dT}{ds} - \alpha'\frac{T}{\varrho},\quad Y = -\beta\frac{dT}{ds} - \beta'\frac{T}{\varrho},\quad Z = -\gamma\frac{dT}{ds} - \gamma'\frac{T}{\varrho}$$

et on en déduit les équations naturelles d'équilibre du fil

$$F_n = -\frac{T}{\varrho},\quad F_\tau = -\frac{dT}{ds},\quad F_b = 0.$$

La tension s'en déduit tout simplement

$$dT = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Si les forces admettent une fonction des forces, on aura

$$dT = -dU,\quad T = -U + h.$$

Exemple 1. Les forces sont parallèles à l'axe z, par exemple :

$$T\frac{dx}{ds} = A,\quad T\frac{dy}{ds} = B,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A},\quad Ay - Bx = C.$$

Exemple 2. Forces centrales ; la forme d'équilibre est alors plane :

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = A,\quad T\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) = B,$$

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C.$$

Le fil est contenu dans le plan passant par le centre des forces :

$$Ax + By + Cz = 0.$$

82. Chaînette. Considérons un fil flexible, homogène et pesant fixé à ses extrémités A et B (fig. 78). Comme les forces sont parallèles, la forme d'équilibre est plane :

$$X = 0, \quad Y\,ds = -p\,ds.$$

Posons que le point A est placé à l'origine des coordonnées et que le point B a pour coordonnées α, β ; l est la longueur du fil : $l^2 > \alpha^2 + \beta^2$. Les équations d'équilibre s'écrivent dans ce cas

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - p\,ds = 0.$$

Il s'ensuit que

$$T\frac{dx}{ds} = A > 0, \quad T = A\frac{ds}{dx}, \quad d\left(A\frac{dy}{dx}\right) - p\,ds = 0,$$

ou

$$d(Ay') - p\,ds = 0,$$

où $y' = dy/dx$. Pour le plan $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ et

$$d(pay') - p\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 0$$

si $A = pa$. On en tire

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Après intégration on obtient

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = e^{\frac{x - x_0}{a}}; \quad -y' + \sqrt{1 + y'^2} = e^{-\frac{x - x_0}{a}},$$

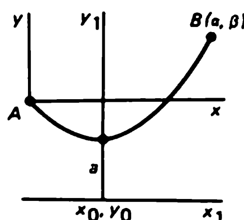


Fig. 78

soit

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right).$$

En intégrant encore une fois on obtient l'équation de la chaînette

$$y - y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) - a,$$

si, au point de coordonnées x_0, y_0, y' est égal à zéro.

En posant $x - x_0 = x_1$, $y - y_0 + a = y_1$, l'équation s'écrit

$$y_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Corollaire. Etant donné que

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) = \frac{y_1}{a},$$

on a

$$T = A\,\frac{ds}{dx} = A\sqrt{1 + y'^2} = py_1.$$

Détermination des paramètres x_0, y_0, a. Conformément aux conditions imposées aux extrémités A et B on a

$$-y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}}\right) - a, \quad \beta - y_0 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}}\right) - a.$$

On en tire

$$\beta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}\right).$$

Comme $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$,

$$l = \int_0^l ds = \int_0^\alpha \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) dx\,;$$

après intégration

$$l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}}\right).$$

Trouvons les expressions de $l + \beta$ et $l - \beta$:

$$l + \beta = a\left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}}\right) = ae^{-\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1\right),$$

$$l - \beta = a\left(e^{\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}}\right) = ae^{\frac{x_0}{a}}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{a}}\right).$$

En multipliant ces expressions l'une par l'autre, il vient

$$l^2 - \beta^2 = a^2\left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 2 + e^{-\frac{\alpha}{a}}\right) = a^2\left(e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right)^2 > 0.$$

On dispose donc des relations nécessaires pour déterminer les paramètres d'une chaînette d'après la longueur du fil et les points de fixation.

CHAPITRE IV

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

§ 1. Notions fondamentales et théorèmes de base

83. L'une des notions fondamentales de la mécanique est celle du *point matériel*. Pratiquement on assimile à un point matériel le centre de masse d'un corps suffisamment petit, à moins qu'il ne s'agisse pas de l'étude du mouvement de ce petit corps par rapport à son centre de masse.

Les équations fondamentales de mouvement d'un point absolument libre de masse m soumis à l'action d'une force ont été établies par Newton. On évalue la force d'après le mouvement qu'elle détermine ou qu'elle tend à déterminer dans un référentiel que nous avons convenu de considérer comme fixe. A l'état d'équilibre la force ne produit aucune action réelle et ne détermine qu'une tendance au mouvement ; néanmoins il convient de mesurer la force par l'effet qu'elle déterminerait si rien ne s'opposait à sa manifestation.

Tous les corps restent à l'état de repos ou sont animés d'un mouvement rectiligne uniforme tant qu'ils ne sont pas soumis à des forces.

La force $\mathbf{F}$ est mesurée par l'accélération $\mathbf{j}$ qu'elle communique aux corps :

$$m\mathbf{j} = \mathbf{F}. \tag{4.1}$$

L'accélération est proportionnelle à la force appliquée et elle est orientée suivant la ligne d'action de la force. Par définition $\mathbf{F}$ représente une force accélératrice. La dynamique est la partie de la science qui est consacrée aux forces accélératrices et aux mouvements que ces forces peuvent déterminer.

Utilisons un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$. Notons x, y, z les coordonnées du point mobile et X, Y, Z les projections de la force $\mathbf{F}$. Les équations de Newton écrites en termes des projections sont alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Dans le cas d'un mouvement particulier d'un point matériel de masse m, défini par les équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

on trouvera les projections X, Y, Z de la force **F** en fonction du temps t en dérivant les équations ci-dessus :

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\varphi'', \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\psi'', \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\chi'',$$

φ'', ψ'' et χ'' sont les dérivées par rapport au temps.

En mécanique classique on considère le cas plus général où X, Y, Z sont donnés en fonction de la position x, y, z du point, de sa vitesse x', y', z' et du temps t :

$$X = X(t, x, y, z, x', y', z'),$$
$$Y = Y(t, x, y, z, x', y', z'),$$
$$Z = Z(t, x, y, z, x', y', z').$$

On peut écrire les équations de mouvement en termes des projections sur les axes de coordonnées :

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{X}{m}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{Y}{m}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

La solution générale de ces équations implique six constantes d'intégration arbitraires

$$x = x(t, c_1, \ldots, c_6), \ldots, x' = x'(t, c_1, \ldots, c_6), \ldots$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des valeurs des coordonnées x_0, y_0, z_0 et des vitesses x_0', y_0', z_0' pour un instant initial

$$x_0 = x(t_0, c_1, \ldots, c_6), \ldots, x_0' = x'(t_0, c_1, \ldots, c_6), \ldots$$

Dans les problèmes de dynamique les conditions initiales déterminent univoquement les solutions du problème de Cauchy pour les équations de mouvement.

La force est une notion relative liée au système de coordonnées que nous considérons comme fixe et dans lequel on mesure la force d'après l'accélération du mobile auquel elle est appliquée. On exprime la force en fonction du temps, de la position du point matériel et de sa vitesse.

84. On appelle *quantité de mouvement du point P* le vecteur $m\mathbf{v}$ appliqué au point P qui possède la même direction et le même sens que la vitesse et dont le module est égal au produit de la masse m par le module v de la vitesse. Le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'origine des coordonnées est égal au vecteur

$$\mathbf{K} = \overline{OP} \times m\mathbf{v},$$

construit sur l'origine des coordonnées O.

On peut écrire l'équation de mouvement de Newton sous la forme

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

autrement dit, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement dans un référentiel fixe est égale à la force s'exerçant sur le point.

Exemple. Si la force $\mathbf{F}$ est parallèle à une direction donnée, la trajectoire du mobile sera plane. En effet, si la force est parallèle à l'axe z, $X = 0$, $Y = 0$ et de ce fait

$$m\frac{dx}{dt} = A, \quad m\frac{dy}{dt} = B,$$

ou

$$A\,dy - B\,dx = 0.$$

En intégrant on obtient

$$Ay - Bx = C,$$

A, B, C étant des constantes d'intégration.

Autrement dit, les coordonnées d'un point mobile vérifient l'équation d'un plan parallèle à l'axe z et contenant le vecteur vitesse initiale.

85. Théorème du moment cinétique. Intégrale des aires. Considérons la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement (moment cinétique) :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{OP} \times m\mathbf{v}) = \overline{OP} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \overline{OP} \times \mathbf{F}.$$

Or $\overline{OP} \times \mathbf{F} = \mathbf{Q}$ est le moment de la force appliquée. Par conséquent, la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement est égale au moment de la force s'exerçant sur le point :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{Q}.$$

Autrement dit, la vitesse de l'extrémité du vecteur moment cinétique est égale au moment de la force.

Exemple. Posons que la force $\mathbf{F}$ s'exerçant sur le point matériel P est telle que sa ligne d'action passe par un point fixe O. Si on prend O pour origine des coordonnées, le moment de la force par rapport au point O sera égal à zéro et d'après le théorème du moment cinétique on aura

$$\overline{OP} \times m\mathbf{v} = \mathbf{c},$$

où **c** est un vecteur constant. On en déduit

$$(\mathbf{c}, \overline{OP}) = 0,$$

ce qui signifie que le point P appartient au plan qui est orthogonal au vecteur constant **c** et qui passe par l'origine des coordonnées.

Supposons que la projection du moment de la force sur l'axe z soit nulle : $M_z = 0$. Ce cas peut se présenter si la force s'exerçant sur le point matériel coupe l'axe z ou lui est parallèle, ou encore si cette force est nulle. En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe z on obtient

$$\frac{d}{dt} m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

x, y, z étant les coordonnées du point mobile P.

En intégrant il vient

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c.$$

Notons p la projection du point P sur le plan Oxy et p_0 la projection du point initial P_0 (fig. 79). Considérons dans le plan xy l'aire s délimitée par la projection de la trajectoire et les deux rayons-vecteurs Op_0 et Op ; on a alors

$$ds = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ x + dx & y + dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x\,dy - y\,dx).$$

L'intégrale précédente s'écrira maintenant

$$2 \frac{ds}{dt} = c,$$

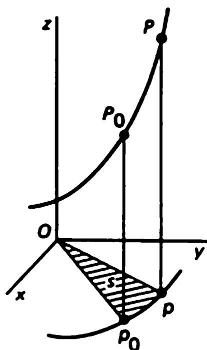


Fig. 79

d'où

$$s = \frac{1}{2} c(t - t_0),$$

ce qui signifie que l'aire s est balayée avec la vitesse aréolaire constante c.

La constante c de l'intégrale des aires est égale au double de l'aire balayée par le rayon-vecteur Op dans l'unité de temps. Inversement, si on peut définir une intégrale des aires dans le plan xy par rapport à l'origine des coordonnées

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c,$$

on aura

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{ou} \quad xY - yX = M_z = 0.$$

86. Théorème des forces vives. Multiplions les équations de mouvement respectivement par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et additionnons :

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right) = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt},$$

ou

$$d \frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

L'expression $\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = T$ porte le nom de *force vive* ou *énergie cinétique* du point matériel P. Les quantités dx, dy, dz représentent les projections sur les axes de coordonnées du déplacement élémentaire du point P que ce dernier effectue réellement au cours du temps dt sous l'action des forces X, Y, Z. La relation ci-dessus exprime le théorème des forces vives : la différentielle de la force vive est égale au travail des forces s'exerçant sur un déplacement élémentaire réel.

Si les forces dérivent d'une fonction des forces $U(x, y, z)$, on a

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

et donc

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU.$$

Le théorème des forces vives s'exprime alors par la relation simple

$$d\,\frac{mv^2}{2} = dU,$$

et on en déduit l'*intégrale* (ou la *loi*) *des forces vives*

$$\frac{mv^2}{2} = U + h, \tag{4.2}$$

où la constante d'intégration $h = \frac{mv_0^2}{2} - U_0$ est la *constante des forces vives* ou de l'*énergie mécanique totale* H du point matériel P, qui se compose de l'énergie cinétique $\frac{mv^2}{2}$ et de l'énergie potentielle $-U$:

$$H = \frac{mv^2}{2} + (-U).$$

87. *Remarque.* Les intégrales premières permettent de simplifier l'intégration des équations différentielles du mouvement.

Il convient de remarquer que lorsqu'on remplace l'équation de mouvement par l'intégrale première, on risque d'introduire dans l'étude une solution supplémentaire résultant du procédé d'évaluation de l'intégrale première. Considérons, par exemple, un pendule mathématique, i.e. un point de masse m se déplaçant dans un plan et lié à un point fixe O par une tige Om impondérable, inextensible et incompressible, de longueur l (fig. 80). Le point m est soumis à l'action de la force de pesanteur $m\mathbf{g}$ et à la réaction $\mathbf{R}$ de la tige, dirigée suivant cette dernière.

Le théorème des forces vives s'écrit dans ce cas

$$d\left[\frac{1}{2}\,ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mgd(l\cos\theta),$$

vu que la réaction $\mathbf{R}$ de la tige ne produit aucun travail sur le déplacement réel du point m orthogonal à Om. L'intégrale de la force vive est donc

$$\frac{1}{2}\,l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{4.3}$$

si à l'instant initial $\theta = \theta_0$ et $\theta_0' = 0$.

La position du point m est déterminée par l'angle θ que fait le segment Om avec la verticale. Une seule équation différentielle suffit donc pour résoudre le problème du mouvement du point m. L'intégrale de la force vive (4.3) peut y suppléer, mais elle comporte une solution étrangère au problème mécanique qui apparaît du fait du procédé mathématique utilisé

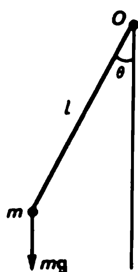


Fig. 80

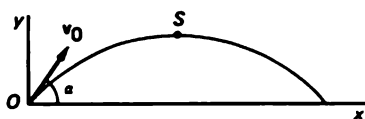


Fig. 81

pour trouver l'intégrale de la force vive, à savoir

$$\theta = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Un pendule pesant ne peut se trouver en équilibre si on l'écarte de la verticale.

L'intégrale de la force vive (4.2) définit dans l'espace $Oxyz$ la région où peuvent avoir lieu les mouvements du point matériel considéré correspondant à des valeurs données de la constante de la force vive h,

$$U + h \geqslant 0,$$

puisque $\frac{mv^2}{2}$ est une quantité non négative. Dans certains cas, cette région peut être fort restreinte. Considérons, par exemple, la position d'équilibre du point m dans laquelle la fonction de force U présente un maximum isolé. Si ce maximum est égal à zéro, dans une petite région entourant cette position d'équilibre la fonction U sera sûrement négative ; elle sera nulle à l'équilibre et négative partout ailleurs. Si h positif est petit, la région $U + h > 0$ sera également petite par continuité et, de ce fait, près de la position d'équilibre les mouvements du point caractérisé par des petites valeurs de la constante de la force vive $h > 0$ se situeront dans un petit voisinage $U + h > 0$. L'équilibre qui présente cette propriété est dit *stable*.

88. Mouvement d'un corps pesant lancé suivant une direction faisant un certain angle avec l'horizontale. Dans le vide, la trajectoire d'un point pesant est plane car les forces auxquelles il est soumis sont parallèles. Disposons l'axe x suivant l'horizontale et l'axe y suivant la verticale ascendante (fig. 81). Plaçons l'origine des coordonnées dans la position initiale du point. Posons que l'instant initial est $t = 0$ et soient $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_0' = v_0 \cos \alpha$, $y_0' = v_0 \sin \alpha$, où v_0 est la vitesse initiale, α l'angle de lancement.

Les équations de mouvement sont de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Après réduction par m, intégration et évaluation des constantes d'intégration on obtient

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Après intégration on trouve les équations de mouvement

$$x = tv_0 \cos\alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + tv_0 \sin\alpha.$$

En éliminant t entre ces équations on obtient l'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Dans le vide la trajectoire d'un point pesant est une parabole à axe vertical dont le paramètre est

$$p = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}.$$

Les coordonnées du sommet S de la parabole se déduisent de la condition qu'en S la vitesse ne possède pas de projection sur l'axe y : $-gt_S + v_0\sin\alpha = 0$; on en tire l'instant du passage du mobile par le sommet $t_S = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; les coordonnées du sommet sont :

$$x_S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_S = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

L'abscisse du point A est deux fois plus grande que l'abscisse x_S du sommet :

$$x_A = 2x_S = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Cette formule montre que la plus grande valeur de x_A correspond à $\alpha = 45°$.

La distance OD jusqu'à la directrice de la parabole est égale à

$$OD = y_S + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

La loi des forces vives qui s'écrit

$$v^2 = v_0^2 - 2gy$$

impose que la vitesse dans le vide d'un point pesant est celle qui correspond à sa chute depuis la directrice sans vitesse initiale.

Cherchons l'enveloppe des trajectoires d'un point pesant lancé depuis l'origine des coordonnées avec une certaine vitesse initiale v_0 mais sous des angles de lancement différents. Ecrivons l'équation de la trajectoire sous la forme

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) + x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Choisissons tg α en qualité de paramètre variable. Pour pouvoir utiliser la méthode générale de calcul des enveloppes il faut éliminer le paramètre, i.e. tg α, entre l'équation de la trajectoire et l'équation qui s'obtient en dérivant celle-ci par rapport au paramètre

$$-\frac{gx^2}{v_0^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha + x = 0.$$

Après élimination de tg α on obtient l'équation de l'enveloppe

$$y - \frac{v_0^2}{2g} = -\frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

On voit que l'enveloppe des trajectoires est une parabole dont l'axe est confondu avec l'axe y et dont le paramètre est v_0^2/g. L'origine des coordonnées est le foyer de l'enveloppe parabolique. Cette dernière porte le nom de parabole de sécurité, car on ne peut atteindre les points situés en dehors de cette dernière en tirant de l'origine des coordonnées un point pesant possédant une vitesse initiale donnée v_0. On peut retrouver ces résultats en résolvant le problème du tir sur un objectif de coordonnées x, y. L'équation servant à la détermination de l'angle de tir α pour que la trajectoire passe par le point donné x, y est

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) + x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Comme c'est une équation algébrique de second degré en tg α, on peut atteindre le point objectif par deux procédés s'il existe deux racines réelles différentes pour tg α, soit par un seul si les racines sont égales. Si les racines sont complexes, on ne peut atteindre l'objectif. La condition de tir au but par un seul procédé est

$$x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0,$$

qui correspond à la solution du problème de l'enveloppe des trajectoires.

Le mouvement dans le vide d'un point pesant peut être déterminé par un procédé géométrique. Conservons les mêmes conditions initiales que ci-dessus. Selon l'intégrale de la force vive $v^2 = v_0^2 - 2gy$, les vitesses des points sur les plans horizontaux d'un même niveau de la fonction de force sont égales. La vitesse est nulle sur la directrice $y = OD = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

L'angle de lancement étant donné, déterminer le foyer F de la parabole. La parabole est le lieu géométrique des points situés à distances égales de la directrice et du foyer ; selon les conditions du problème, le point O appartient à la parabole. Il s'ensuit que le lieu géométrique des foyers F des paraboles est un cercle de rayon OD dont le centre se trouve au point O (fig. 82).

La tangente à la parabole divise par deux l'angle que fait la normale à la directrice avec le rayon passant par le foyer. Par conséquent si, partant de v_0, on porte de l'autre côté de la verticale l'angle que fait v_0 avec la verticale, on obtient le rayon OF sur lequel doit se situer le foyer de la parabole. L'intersection du cercle de rayon OD avec le rayon OF définit le foyer F (fig. 82).

Soit le problème de porter un coup au point M. Soit MK la distance entre le point M et la directrice commune à toutes les paraboles (fig. 83). Le foyer F des paraboles passant par le point M doit se situer sur le cercle (MK) de rayon MK et de centre M. Mais le foyer doit aussi appartenir au cercle (OD). L'intersection des cercles (OD) et (MK) définit soit deux points F_1 et F_2 (fig. 83), soit un seul point (fig. 84) dans le cas où les cercles (OD) et (MK) sont tangents, soit ne définit aucun point si les cercles (OD) et (MK) ne se coupent pas. L'angle de lancement, correspondant à un foyer F connu de la parabole, peut être déterminé géométriquement aussi simplement que l'angle d'impact au point M.

Cherchons le lieu géométrique des points M où on ne peut parvenir que par un seul moyen. Pour ces points le cercle (MK) doit être tangent

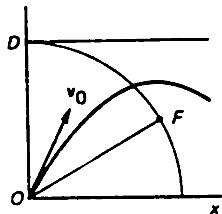


Fig. 82

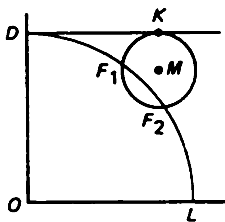


Fig. 83

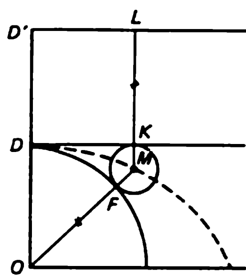


Fig. 84

au cercle des foyers (OD). Portons sur la perpendiculaire MK un segment constant ML de longueur égale à $OD + MK$ (fig. 84). La distance MO du point M jusqu'à l'origine est égale à la distance ML qui le sépare de la droite $D'L$; il s'ensuit que les points M doivent se situer sur une parabole de directrice $D'L$ et de foyer O.

Cette parabole est la parabole de sécurité.

89. L'équation de mouvement d'un point de masse m et portant une charge électrique ε dans un champ électromagnétique de vecteur électrique **E** et de vecteur magnétique **H** est de la forme

$$m\mathbf{j} = \varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{H} \times \mathbf{v}),$$

où **v** et **j** sont respectivement la vitesse et l'accélération du point mobile.

Considérons le cas du champ électromagnétique permanent lorsque les vecteurs **E** et **H** sont constants. Orientons l'axe z suivant le vecteur **H** et l'axe y perpendiculairement aux vecteurs **E** et **H**. Notons P, $Q = 0$, R les projections de **E** sur les axes x, y, z et $X = 0$, $Y = 0$, Z les projections de **H** sur ces mêmes axes. Les équations de mouvement seront alors de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon P - \varepsilon Z\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Z\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon R. \tag{4.4}$$

En intégrant une fois ces équations et en utilisant les notations

$$p = \frac{\varepsilon P}{m}, \quad r = \frac{\varepsilon R}{m}, \quad \omega = -\frac{\varepsilon Z}{m},$$

on obtient

$$\frac{dx}{dt} = pt + \omega y + a, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega x + b, \quad \frac{dz}{dt} = rt + c, \tag{4.5}$$

où a, b, c sont des constantes d'intégration arbitraires.

Eliminons dy/dt de la première équation (4.4) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\left(x - \frac{b}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}\right) = 0.$$

En adoptant pour variable l'expression entre parenthèses on aura

$$x = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2} + A\sin(\omega t + \alpha),$$

où A et α sont des constantes d'intégration. On tire directement de la première équation (4.5)

$$y = -\frac{a}{\omega} - \frac{pt}{\omega} + A\cos(\omega t + \alpha).$$

L'intégration de la dernière équation du système (4.5) donne

$$z = \frac{rt^2}{2} + ct + c'.$$

On peut mettre la solution obtenue sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2$$

avec

$$x_1 = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2}, \quad y_1 = -\frac{a}{\omega} - \frac{pt}{\omega}, \quad z_1 = \frac{rt^2}{2} + ct + c',$$

$$x_2 = A \sin(\omega t + \alpha), \quad y_2 = A \cos(\omega t + \alpha), \quad z_2 = 0.$$

Le mouvement x_2, y_2, z_2 représente le mouvement sur un cercle de rayon A contenu dans le plan xy avec une fréquence circulaire ω. Le mouvement x_1, y_1, z_1 est un mouvement sur une parabole contenue dans le plan $x_1 = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2}$; l'axe de la parabole est parallèle à l'axe z, elle est convexe vers z croissant pour $\varepsilon < 0$.

90. Forces centrales. Les forces sont dites *centrales* si elles passent par un point fixe O qui porte le nom de *centre des forces*. Sous l'action des forces centrales le point matériel décrit une courbe contenue dans un plan passant par le centre des forces O. Faisons coïncider le plan de la trajectoire avec le plan des axes de coordonnées x, y, dont l'origine est au centre des forces O. On posera que la force centrale est positive si elle est répulsive et négative si elle est attractive. Le mouvement déterminé par l'action des forces centrales dépendant de la distance r entre le point mobile et le centre O est décrit par deux intégrales premières : l'intégrale des aires et l'intégrale des forces vives, puisque le moment des forces centrales par rapport au centre des forces est toujours égal à zéro et que les forces centrales dépendant de r dérivent toujours d'une fonction des forces.

L'intégrale des aires

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

s'écrit en coordonnées polaires sous la forme

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C. \tag{4.6}$$

Le théorème des forces vives est de la forme

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy = F\frac{x}{r}\,dx + F\frac{y}{r}\,dy = F\frac{x\,dx + y\,dy}{r} = F\,dr, \tag{4.7}$$

car les projections des forces s'expriment par

$$X = F\frac{x}{r}, \quad Y = F\frac{y}{r},$$

avec $r^2 = x^2 + y^2$. Par conséquent, si $F = F(r)$, la fonction des forces sera

$$U = \int F(r)dr.$$

Cette condition étant remplie, l'intégrale des forces vives s'écrira

$$\frac{mv^2}{2} = U + h. \tag{4.8}$$

La position d'un point sur un plan est donnée par deux coordonnées ; il s'ensuit qu'il suffit de connaître l'intégrale des aires et l'intégrale des forces vives pour résoudre les problèmes relatifs aux mouvements d'un point soumis à l'action de forces centrales dépendant de r.

Il est commode de résoudre les problèmes en utilisant les coordonnées polaires r et θ, avec lesquelles on a

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

A l'aide de l'intégrale des aires (4.6) on peut éliminer dt en utilisant la relation

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2;$$

on obtient ainsi

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right].$$

En divisant par $d\theta$ l'expression (4.7) du théorème des forces vives on obtient

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{mC^2}{2}\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\right\} = F\frac{dr}{d\theta}.$$

Après dérivation et division par $dr/d\theta$ on obtient la *formule de Binet*

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right). \tag{4.9}$$

Cette équation permet de calculer r en fonction de θ, de déterminer donc la trajectoire du point matériel lorsque F dépend de r seulement ou de r et de θ. Si F ne dépend que de r, on peut calculer la trajectoire aussi bien par la formule (4.8).

§ 2. Mouvement des planètes

91. A la suite des observations de Tycho Brahe, Kepler put établir trois lois concernant le mouvement des planètes.

1. Chaque planète décrit autour du Soleil, dans le sens direct, des courbes planes en respectant la loi des aires.

2. Ces trajectoires sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

3. Les carrés des temps de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

Newton déduisit de ces lois la loi de l'attraction universelle. Si les trajectoires sont planes et si le mouvement s'effectue conformément à la loi des aires par rapport au Soleil, les forces sont centrales et le Soleil est le centre des forces.

Le calcul de la force F s'effectue à l'aide de la formule de Binet. En coordonnées polaires l'équation de l'ellipse dont le pôle est au foyer est de la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p},$$

où p est le paramètre, e l'excentricité de l'ellipse. En appliquant la formule de Binet on a

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = -\frac{mC^2}{pr^2},$$

où C est la constante des aires, m la masse de la planète. En désignant C^2/p par μ, on a

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

D'après la dernière loi de Kepler, μ ne dépend pas de la planète. La constante des aires C est égale au double de l'aire de l'ellipse, i.e. à la trajectoire $2\pi ab$ divisée par le temps de révolution T de la planète :

$$C = \frac{2\pi ab}{T},$$

où a est le demi grand axe et b le demi petit axe de l'orbite de la planète. Comme le paramètre $p = b^2/a$, on a

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Or, selon la loi de Kepler, a^3/T^2 possède la même valeur pour toutes les planètes du système Solaire. En conséquence, la force d'attraction de la planète

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}$$

est dirigée vers le Soleil, est proportionnelle à la masse de la planète et inversement proportionnelle au carré de la distance jusqu'au Soleil.

Ayant établi par ce procédé la loi de la gravitation universelle, Newton a résolu le problème direct : déterminer le mouvement d'un point matériel de masse m attiré par un centre fixe avec une force inversement proportionnelle au carré de la distance séparant le point du centre des forces.

Posons que la force centrale est donnée par la formule

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

L'intégrale correspondante des forces vives

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h$$

peut être écrite sous la forme

$$C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right] = \frac{2\mu}{r} + h,$$

où h est une constante. On en tire

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}.$$

En posant

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = u\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}},$$

l'équation précédente s'écrira avec la nouvelle variable sous la forme

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 1 - u^2,$$

ou

$$\frac{\pm du}{\sqrt{1 - u^2}} = d\theta.$$

Après intégration

$$\pm \arccos u = \theta - \theta_0, \quad u = \cos(\theta - \theta_0),$$

l'équation de la trajectoire s'écrit

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cos(\theta - \theta_0).$$

En identifiant cette équation avec l'équation de la section conique en coordonnées polaires dont le pôle est placé au foyer

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta - \theta_0),$$

où e est l'excentricité, p le paramètre de la section conique, on constate que la trajectoire du point matériel est une section conique dont le foyer se trouve au centre des forces, le paramètre de l'orbite est égal à

$$p = \frac{C^2}{\mu}$$

et l'excentricité à

$$e = p\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}.$$

Si h est négatif, la trajectoire est une ellipse, puisque $e < 1$. Si h est égal à zéro, la trajectoire est une parabole puisque $e = 1$, et si h est positif, la trajectoire est une hyperbole puisque $e > 1$.

La constante des forces vives

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$$

dépend de la valeur numérique du rayon-vecteur initial r_0 et de la vitesse initiale v_0. Donc, si dans certaines conditions initiales la trajectoire d'un point matériel, soumis à une force d'attraction, est une ellipse, elle restera elliptique même si la direction de la vitesse initiale est modifiée.

92. Etude géométrique. Supposons pour fixer les idées que la distance initiale r_0 et la vitesse initiale v_0 vérifient la condition d'une orbite elliptique $h < 0$. On a les formules de géométrie

$$e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2),$$

où a et b sont respectivement le demi grand et le demi petit axe de l'ellipse, c est la distance focale par rapport au centre de l'ellipse. Compte tenu de la valeur du paramètre $p = \frac{C^2}{\mu}$ et de celle de l'excentricité $e = \sqrt{1 + hC^2/\mu^2}$, du problème de la trajectoire on a

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\mu}{h},$$

ce qui signifie que le demi grand axe de l'orbite elliptique ne dépend que de la constante des forces vives. Le demi petit axe b

$$b^2 = -\frac{C^2}{h}$$

dépend de la constante des aires et de la constante des forces vives.

Considérons maintenant les orbites elliptiques issues d'un même point M_0 avec une vitesse v_0 constante. Nous avons déjà montré que toutes ces orbites auront le même demi grand axe.

Soient O le centre des forces, M_0 la position du point initial, v_0 sa vitesse initiale, $h < 0$, a le demi grand axe de toutes les orbites elliptiques ayant le même foyer O. Cherchons le lieu géométrique des points F — seconds foyers des orbites.

Puisque M_0 est un point de l'orbite, d'après la définition de l'ellipse

$$M_0O + M_0F = 2a,$$

ou

$$M_0F = 2a - r_0.$$

Ainsi le lieu géométrique des seconds foyers F est un cercle de rayon $2a - r_0$ dont le centre est en M_0 (fig. 85). Notons H le point de ce cercle le plus éloigné du centre O. Il se trouve sur la droite OM_0 à une distance du centre des forces égale au double du demi grand axe $OH = 2a$; le cercle des foyers peut être désigné par (M_0H) puisque M_0H est son rayon et M_0 son centre. Il est facile de trouver le foyer F de l'orbite connaissant la direction de la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. La vitesse $\mathbf{v}_0$ étant dirigée suivant la tangente à l'orbite au point M_0 doit diviser en deux l'angle HM_0F.

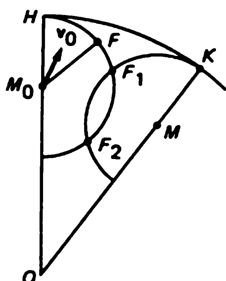


Fig. 85

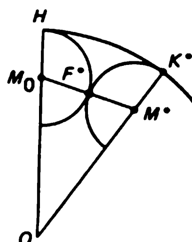


Fig. 86

Considérons le problème du tir au but en un point M donné. Traçons un cercle (OH) de rayon $OH = 2a$, de centre O et menons le rayon OM. Notons K le point où ce rayon coupe le cercle (OH). Comme l'orbite elliptique cherchée doit passer par M, son second foyer F_α doit vérifier les relations

$$MO + MF_\alpha = 2a = MO + MK,$$

ou

$$MF_\alpha = MK.$$

Ce foyer F_α doit se situer sur le cercle (MK) de rayon MK et de centre M. L'intersection du cercle (MK) avec le cercle des foyers (M_0H) détermine les foyers F_α des orbites passant par le point donné M.

Trois cas sont à envisager : 1) les cercles (M_0H) et (MK) se coupent en deux points F_1 et F_2 ; le point matériel peut parvenir au point M de deux façons différentes : suivant l'orbite de foyer F_1 et suivant l'orbite de foyer F_2 ; 2) les cercles (M_0H) et (MK) ont un point de contact F ; le point matériel ne peut parvenir au point donné M que suivant l'orbite de foyer F ; 3) les cercles (M_0H) et (MK) ne se coupent pas, ce qui signifie que le point matériel ne peut parvenir au point M suivant l'une des orbites considérées.

Définissons la limite entre les points où on peut parvenir suivant deux orbites et les points où le mobile ne peut parvenir. Cette limite est le lieu géométrique des points M^* où le mobile peut parvenir par un seul procédé.

Définissons un rayon OK^* issu du centre des forces et coupant le cercle (OH) (fig. 86). Déterminons sur OK^* le point unique M^* pour lequel le cercle (M^*K^*) est tangent au cercle des foyers (M_0H) au point F^*. Le foyer F^* de l'orbite passant par le point M^* se trouve sur la droite M_0M^*. On

peut écrire

$$M^*O + M^*F^* = 2a,$$

d'où

$$M^*O + M^*M_0 = M^*O + M^*F^* + F^*M_0 = HO + HM_0.$$

La somme des distances du point M^* jusqu'au centre des forces O et jusqu'au point initial M_0 est constante ; il s'ensuit que le lieu géométrique des points M^* est l'ellipse de sécurité des foyers O et M_0 passant par le point H dont le demi grand axe est égal à $^1/_2(OH + HM_0)$.

Problème du corps au but. Faire parvenir le point matériel en un point donné M à partir d'une position initiale M_0 avec une vitesse de lancement initiale v_0 dont la valeur est fixée (fig. 87). On doit déterminer la vitesse initiale v_0 de manière que le point M se trouve sur l'ellipse de sécurité correspondante, i.e. pour qu'il n'y ait pas d'excès de vitesse entraînant deux façons d'atteindre le but.

Le grand axe de l'ellipse de sécurité correspondante est donné par (cf. fig. 87) :

$$2a^* = MO + MM_0.$$

On en déduit la position du point H appartenant simultanément à la droite OM_0 et à l'ellipse de sécurité avec

$$OH + HM_0 = MO + MM_0 = 4a - r_0,$$

a est le demi grand axe de l'orbite correspondant à la vitesse initiale v_0 ; selon la formule précédente, a est égal au quart du périmètre R du triangle OM_0M :

$$a = \frac{MO + MM_0 + OM_0}{4} = \frac{R}{4}.$$

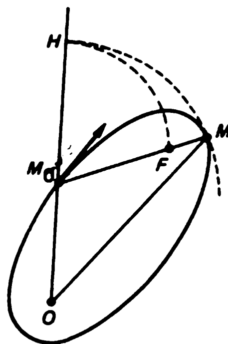


Fig. 87

En substituant les valeurs $a = -\mu/h$ et $h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ on obtient

$$v_0 = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r_0} - \frac{2}{R}\right)}.$$

Le foyer F de l'orbite passant par le point donné M est défini par l'intersection du cercle (M_0H) et de la droite M_0M ; l'angle de lancement est donné par la bissectrice de l'angle MM_0H.

93. Détermination du temps dans le mouvement elliptique. Le sommet A du grand axe de l'orbite le plus proche du Soleil S porte le nom de périhélie. L'angle $\theta = AFM$ est appelé anomalie réelle (fig. 88). Pour une orbite elliptique on peut écrire l'intégrale des forces vives sous la forme

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Substituons à C^2 sa valeur $\mu p = \mu a(1 - e^2)$, on obtient

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{a}\,[a^2e^2 - (a - r)^2],$$

soit

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = \pm\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}}.$$

Le signe de cette égalité change lorsqu'on passe par les apsides où $a^2e^2 - (a - r)^2$ disparaît. Posons

$$a - r = ae\cos u,$$

égalité que l'on peut écrire puisque $(a - r)^2$ n'est pas plus grand que a^2e^2 ;

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = (1 - e\cos u)du.$$

Après intégration et en utilisant la relation $\mu = 4\pi^2a^3/T^2$ établie plus haut, on obtient l'*équation de Kepler*

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_0) = u - e\sin u,$$

où t_0 est l'instant du passage par le périhélie, lorsque u s'annule ; T désigne la durée d'une révolution de la planète sur son orbite.

La variable u se laisse calculer à l'aide de l'équation

$$r = a(1 - e\cos u). \tag{4.10}$$

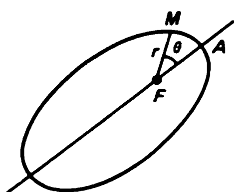


Fig. 88

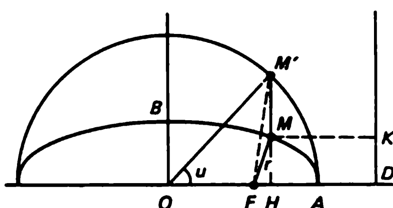


Fig. 89

En effet, on peut considérer l'ellipse comme le résultat de la déformation d'un cercle de rayon a, qui réduit les ordonnées dans le rapport b/a. Soient M un point de l'ellipse, M' le point correspondant du cercle, O le centre de l'ellipse ; l'angle $M'OA = u$ est l'*anomalie excentrique* (fig. 89). Posons que la droite DK représente la directrice de l'ellipse. On sait que l'ellipse est le lieu géométrique des points M tels que le rapport du rayon focal FM à la distance entre les points M et la directrice DK est égal à l'excentricité e. On en tire

$$r = eMK = e(OD - OH) = e\left(\frac{a}{e} - a\cos u\right) = a(1 - e\cos u).$$

En identifiant avec la formule (4.10) montrer que u de l'équation de Kepler est l'anomalie excentrique.

En éliminant r entre l'équation (4.10) et l'équation de l'orbite en coordonnées polaires

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p},$$

où θ désigne l'anomalie vraie, on obtient une relation entre les anomalies

$$1 - e\cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta},$$

que l'on peut réduire à une forme symétrique et commode

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

94. Le mouvement elliptique d'un point matériel M dans l'espace est déterminé par six constantes. Faisons coïncider avec le centre des forces O l'origine d'un système d'axes rectangulaires fixes x, y, z (fig. 90). Le plan de l'orbite coupe le plan xy suivant la droite NN' que l'on appelle ligne des nœuds. Le point N de l'orbite, où z de négatif devient positif lors du

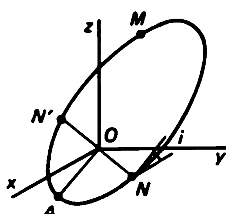


Fig. 90

mouvement de la planète, est dit *nœud ascendant* ; le point opposé N' est le *nœud descendant*.

Le plan de l'orbite est déterminé par la longitude du nœud ascendant $\Omega = \angle xON$ et par l'inclinaison i du plan de l'orbite par rapport au plan xy ; on mesure l'inclinaison i par l'angle entre les perpendiculaires à ON dressées du nœud N : l'une dans le plan xy, dans le sens de la révolution positive, l'autre dans le plan de l'orbite, dans le sens du déplacement du point M sur l'orbite. Soit A le périhélie. La *longitude* du périhélie est la quantité ω égale à la somme des angles $\angle xON$ et $\angle NOA$. L'ellipse est définie par le demi grand axe a et l'excentricité e. Pour déterminer le temps il faut fixer le temps t_0 du passage de la planète par le périhélie. Nous voyons donc que pour définir une orbite elliptique il suffit de connaître les six constantes Ω, i, ω, a, e, t_0, que l'on appelle éléments du mouvement elliptique.

§ 3. Mouvement du point lié

95. Etant donné un repère orthogonal fixe $Oxyz$, considérons un point de masse m, de coordonnées x, y, z soumis à l'action de forces dont les projections sont X, Y, Z ainsi qu'à une liaison $f(x, y, z, t) = 0$. Nous n'envisagerons qu'une liaison parfaite (sans frottement) dont la réaction est normale à la surface $f(x, y, z, t) = 0$ à l'instant t, ce qui se traduit par

$$\frac{R_x}{\partial f/\partial x} = \frac{R_y}{\partial f/\partial y} = \frac{R_z}{\partial f/\partial z} = \lambda. \qquad (4.11)$$

Si on associe à la force X, Y, Z la réaction de la liaison R_x, R_y, R_z, on peut considérer que le point M est libre, mais soumis aux forces $X + R_x$, $Y + R_y$, $Z + R_z$; on peut alors lui appliquer les équations de mouvement de Newton :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + R_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + R_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + R_z.$$

A l'aide de (4.11) on détermine R_x, R_y, R_z et on porte leurs valeurs dans les équations précédentes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ces équations portent le nom d'équations de Lagrange avec le multiplicateur λ. Si on leur adjoint l'équation de liaison $f(x, y, z, t) = 0$, on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, λ. En dérivant $f(x, y, z, t) = 0$ par rapport à t on trouve que les projections de la vitesse dx/dt, dy/dt, dz/dt vérifient la relation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Multiplions les équations de Lagrange avec le multiplicateur λ respectivement par dx, dy, dz et sommons les résultats. Après quelques transformations évidentes on retrouve le théorème des forces vives :

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \lambda\frac{\partial f}{\partial t}\,dt.$$

La différentielle de la force vive d'un point matériel est égale au travail produit par les forces qui lui sont appliquées sur le déplacement réel $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ plus le travail de la réaction $-\lambda\frac{\partial f}{\partial t}\,dt$ produit sur le déplacement réel au cours du temps dt.

Si la surface sur laquelle le point est astreint à rester est fixe, la fonction f ne dépend pas explicitement du temps : $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$; le théorème des forces vives s'écrit alors

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

puisque le travail de la réaction de liaison sur tout déplacement réel est alors égal à zéro.

96. Mouvement d'un point sur une surface fixe. Mouvement par inertie. Considérons le cas où, la surface étant immobile, le point de masse m est soumis, outre la réaction **R** de la surface, à une force **F**. Si la surface est parfaitement lisse, la réaction **R** est orthogonale à la surface au point considéré.

Utilisons le trièdre naturel : l'axe τ est dirigé suivant la tangente, l'axe n suivant la normale et l'axe b suivant la binormale à la trajectoire du point (fig. 91). Les équations de mouvement écrites en termes des projections sur



Fig. 91

les axes de ce trièdre naturel sont de la forme

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\varrho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b, \tag{4.12}$$

où ϱ désigne le rayon de courbure de la trajectoire, $F_\tau, \ldots, R_b$ désignent les projections des forces en présence sur les axes désignés en indice.

Si les forces sont absentes ($\mathbf{F} = 0$), il résulte de la dernière équation que $R_b = 0$ et la projection de la réaction sur la normale à la trajectoire est égale à toute la réaction : $R_n = R$, puisque la réaction d'une surface lisse est, par définition, toujours orthogonale à la tangente : $R_\tau = 0$. Il s'ensuit que la normale n à la trajectoire coïncide avec la normale à la surface. Les lignes qui jouissent de cette propriété sont appelées *lignes géodésiques*.

Ainsi, dans le cas d'une surface immobile, les mouvements du point par inertie se produisent le long des lignes géodésiques de la surface. Selon la première des équations de mouvement (4.12) $\left(m\frac{dv}{dt} = 0\right)$ ces mouvements par inertie se produiront avec une vitesse constante ; cela ressort aussi de l'intégrale des forces vives.

97. Théorème de Clairaut. Considérons le cas où la surface immobile est une surface de révolution autour de l'axe z et le point matériel se déplace par inertie sur cette surface. Nous venons de montrer que le point se déplace sur une ligne géodésique avec une vitesse constante v = const. D'autre part, comme la réaction $\mathbf{R}$ est dirigée suivant l'axe z ou est parallèle à l'axe z, le moment par rapport à l'axe z des forces s'exerçant sur le point matériel est égal à zéro : $M_z = 0$. Il s'ensuit que dans le plan xy l'intégrale des aires doit être valable, c.-à-d. que le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe z reste constant au cours du mouvement. Décomposons le vecteur quantité de mouvement $m\mathbf{v}$ dans le plan tangent en direction tangente au méridien $mv \cos i$ et en direction tangente au parallèle $mv \sin i$ (fig. 92), i désignant l'angle que fait $\mathbf{v}$ avec le méridien. Le moment par rapport à l'axe z de la quantité de mouvement tangente au méridien est

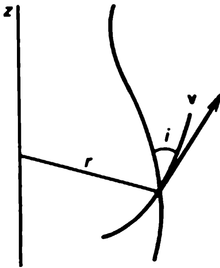


Fig. 92

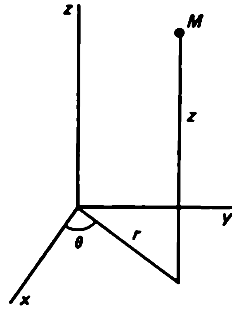


Fig. 93

égal à zéro, car la tangente au méridien d'une surface de révolution est soit parallèle à l'axe z, soit le coupe. Le moment de la quantité de mouvement tangente au parallèle est égal au produit de cette quantité de mouvement $mv \sin i$ par le bras r — distance entre le point M et l'axe z. Par suite

$$rv \sin i = \text{const.}$$

Il en résulte le théorème de Clairaut :

$$r \sin i = \text{const.}$$

Pour établir les équations des lignes géodésiques sur les surfaces de révolution il convient de définir les coordonnées cylindriques, comme indiqué sur la figure 93. En coordonnées cylindriques la différentielle de l'arc s'écrit sous la forme

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Posons que l'équation de la génératrice de la surface de révolution est $z = f(r)$. La différentielle de l'arc sur la surface de révolution considérée peut être écrite comme suit :

$$ds^2 = dr^2(1 + f_r'^2) + r^2 d\theta^2.$$

La loi des forces vives appliquée au mouvement par inertie du point sur la surface de révolution considérée s'exprime par

$$r'^2(1 + f_r'^2) + r^2\theta'^2 = v_0^2,$$

et la loi des aires s'exprimera par

$$r^2\theta' = C,$$

où C désigne le double de la vitesse aréolaire de la projection du point M sur le plan xy. On en tire

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{C},$$

ce qui montre que l'on peut éliminer le temps de la loi des forces vives :

$$dr^2(1 + f_r'^2) + r^2 d\theta^2 = \frac{v_0^2}{C^2} r^4 d\theta^2,$$

ou encore

$$dr^2(1 + f_r'^2) = \left(\frac{v_0^2}{C^2} r^4 - r^2\right) d\theta^2.$$

Les variables se laissent séparer :

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f_r'^2}{\frac{v_0^2}{C^2} r^2 - 1}};$$

les lignes géodésiques sont décrites par la quadrature

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{1 + f_r'^2}{\frac{v_0^2}{C^2} r^2 - 1}} \frac{dr}{r}.$$

98. Pendule sphérique. Etudions le mouvement d'un point pesant sur une sphère fixe. Adoptons un système de coordonnées fixe dont l'origine se trouve au centre O de la sphère ; l'axe z est orienté suivant la verticale ascendante et les axes x et y d'une façon quelconque dans le plan horizontal. Définissons dans le plan horizontal les coordonnées polaires r, θ. L'étude sera faite en coordonnées cylindriques z, r, θ.

L'équation de la sphère est $r^2 + z^2 = l^2$, où l est le rayon de la sphère. La fonction de force de la pesanteur est $U = -mgz$, où g est l'accélération de la pesanteur. L'intégrale des forces vives

$$\frac{mv^2}{2} = -mgz + h'$$

peut être ramenée à la relation

$$z'^2 + r'^2 + r^2\theta'^2 = -2gz + h \quad \left(h = \frac{2h'}{m}\right). \tag{4.13}$$

Dans le cas étudié on peut utiliser l'intégrale des aires dans le plan xy

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

puisque les moments de la force de pesanteur et de la réaction par rapport à l'axe z sont égaux à zéro.

Afin d'éliminer les coordonnées polaires multiplions l'équation des forces vives (4.13) par r^2 :

$$(rr')^2 + (r^2\theta')^2 + (l^2 - z^2)z'^2 = (-2gz + h)(l^2 - z^2).$$

Selon l'intégrale des aires et la relation $rr' = -zz'$ qui résulte de la dérivation de l'équation de liaison on obtient

$$(lz')^2 = (l^2 - z^2)(h - 2gz) - C^2,$$

ou

$$l\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\varphi(z)} \tag{4.14}$$

avec

$$\varphi(z) = (l^2 - z^2)(h - 2gz) - C^2.$$

Dans le problème de mécanique étudié, le polynôme $\varphi(z)$ possède trois racines réelles. En effet, notons z_0 la valeur initiale de la coordonnée z. Comme le point M se situe sur la sphère de rayon l, on a $-l \leqslant z_0 \leqslant l$. La quantité $\varphi(z_0)$ ne peut être négative en vertu de (4.14) puisque, d'après le sens du problème de mécanique, la vitesse initiale $(dz/dt)_0$ ne peut être une quantité imaginaire. Posons que $\varphi(z_0) > 0$. Si la constante des aires C est différente de zéro, pour $z = \pm l$ la fonction $\varphi(z)$ est négative. Pour des valeurs suffisamment grandes de z le signe de $\varphi(z) = 2gz^3 + \ldots$, dépendant du terme du plus haut degré, est positif. En appliquant la règle des signes de Lagrange on arrive à la conclusion que le polynôme $\varphi(z)$ possède trois racines réelles α, β, γ respectivement dans les intervalles $(-l, z_0)$, $(z_0, +l)$, $(+l, \infty)$ (fig. 94). Dans notre problème de mécanique, en vertu de (4.14), z peut varier dans les limites $(-l, +l)$, là où $\varphi(z) \geqslant 0$; il s'ensuit que

$$\alpha \leqslant z \leqslant \beta.$$

Démontrons que α est toujours négatif. Pour cela, écrivons le polynôme sous la forme

$$\varphi(z) = 2g\left(z^3 - z^2\frac{h}{2g} - zl^2 + \frac{l^2h - c^2}{2g}\right),$$

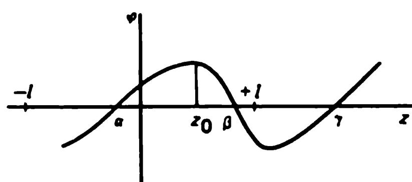


Fig. 94

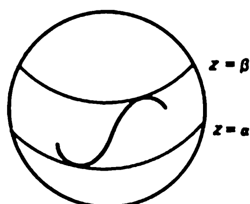


Fig. 95

d'où, en vertu de la représentation du polynôme en termes des racines $\varphi(z) = 2g(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$, on obtient

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -l^2,$$

d'où

$$\gamma = -\frac{l^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} > 0.$$

Comme les valeurs numériques de α et β ne peuvent être supérieures à l, le numérateur $l^2 + \alpha\beta$ est toujours positif et, par suite, il découle de l'inégalité ci-dessus que $\alpha + \beta < 0$, ou $\alpha < 0$.

Ainsi la zone comprise entre les parallèles $z = \alpha$, $z = \beta$, où doit se déplacer le mobile M, est telle que sa limite inférieure se trouve au-dessous de l'équateur ($\alpha < 0$) (fig. 95). Le point M oscille dans cette zone en parvenant jusqu'aux parallèles supérieure et inférieure puisque t est donné par la quadrature elliptique

$$\int dt = \int \frac{l\, dz}{\pm\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Si la constante des aires C est différente de zéro, l'angle θ variera toujours de façon monotone dans un seul sens en vertu de l'intégrale des aires :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}.$$

Le cas $C = 0$ correspond au pendule simple que nous examinerons spécialement.

§ 4. Mouvement le long d'une ligne

99. Théorème général. Considérons un point matériel M de masse m qui est astreint à rester sur une ligne définie par l'intersection de deux surfaces :

$$f_1(t, x, y, z) = 0, \quad f_2(t, x, y, z) = 0. \tag{4.15}$$

La réaction **R** d'une ligne parfaitement lisse est orthogonale à la ligne et doit donc être contenue dans le plan passant par les normales aux surfaces $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. En décomposant la réaction **R** suivant les normales à ces surfaces et en remarquant que les cosinus directeurs des normales sont proportionnels aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z} \quad (i = 1, 2),$$

il vient

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad R_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

$$R_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

λ_1, λ_2 étant des multiplicateurs inconnus. Si on ajoute la réaction **R** à la force active **F** agissant sur le point M et dont les projections sont X, Y, Z, on pourra écrire les équations de mouvement du point considéré, assimilé à un point libre de tout lien mais soumis à l'action de la force **F** + **R**

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Si on introduit dans les équations des liaisons (4.15) les valeurs des coordonnées du point mobile en fonction du temps t, on obtiendra des identités en t que l'on peut dériver par rapport à t autant de fois que l'on voudra. En dérivant une fois on obtient

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

En multipliant les équations de mouvement par dx, dy, dz respectivement et en additionnant les résultats, on obtient après quelques arrangements simples

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \left(-\lambda_1\,\frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2\,\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) dt,$$

ce qui signifie que la différentielle de la force vive est égale au travail effectué par les forces actives sur le déplacement réel du mobile plus le travail effectué par la réaction sur le déplacement réel du mobile au cours du temps dt.

Si les surfaces dont l'intersection définit la ligne sont fixes, les fonctions f_1 et f_2 ne dépendent pas explicitement de t $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0,\ i = 1, 2\right)$, si bien que l'expression du théorème des forces vives se simplifie

$$d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

100. Mouvement d'un point pesant le long d'une ligne. Lorsqu'un point pesant M se déplace le long d'une ligne fixe, on peut lui appliquer la loi des forces vives. En orientant l'axe z suivant la verticale ascendante, les projections de la force de pesanteur seront : $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$, m étant la masse du point et g l'accélération de la pesanteur. Le théorème des forces vives s'exprime par l'équation

$$d\,\frac{mv^2}{2} = -mg\,dz,$$

ou, après réduction par m et intégration,

$$\frac{v^2}{2} = -gz + h.$$

Substituons à la constante des forces vives h une nouvelle constante a définie par $h = ga$. On aura alors

$$v^2 = 2g(a - z).$$

En considérant un plan π défini par l'équation $z - a = 0$, l'équation précédente s'écrira

$$v^2 = 2gPM,$$

où PM est la distance entre le point M et le plan π (fig. 96). Autrement dit, la vitesse du point M est celle que ce point posséderait s'il tombait à la verticale à partir du point P sans vitesse initiale. Pour une ligne fermée

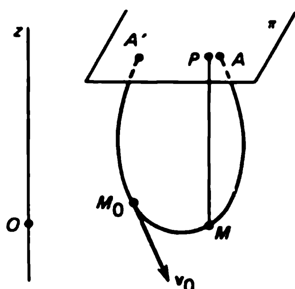


Fig. 96

finie on peut toujours trouver une valeur si grande de la vitesse initiale v_0 que le point se déplacera sur la ligne au cours d'un temps indéfini. Comme dans ce cas la valeur de $a = \frac{v_0^2}{2g} + z_0$ sera grande, le plan π ne coupe pas la ligne, ce qui implique que la vitesse ne s'annulera pas.

Notons A' et A les points où le plan π coupe la ligne considérée. Si la tangente au point A n'est pas horizontale, le point M parviendra au point A. En effet, selon l'intégrale des forces vives

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(a - z),$$

où s est la longueur de l'arc sur la ligne comptée dans n'importe quel sens. A la position initiale M_0 correspondent s_0 et $t_0 = 0$. Par suite

$$\frac{ds}{\pm\sqrt{2(a - z)g}} = dt,$$

et après intégration

$$\sqrt{2g}\,t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{a - z}}.$$

En notant l la longueur de l'arc M_0A on aura près du point A

$$z(s) = z(l) + \frac{1}{\lambda!}(s - l)^\lambda \left(\frac{d^\lambda z}{ds^\lambda}\right)_{s=l} + \ldots,$$

λ désigne l'ordre de petitesse de la quantité

$$(a - z) = z(l) - z(s) = -\frac{1}{\lambda!}(s - l)^\lambda \left(\frac{d^\lambda z}{ds^\lambda}\right)_{s=l}$$

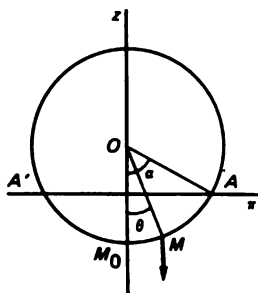


Fig. 97

pour $s \to l$. Par conséquent $\lambda/2$ désigne l'ordre de petitesse de la quantité $\sqrt{a - z}$. On démontre par un calcul intégral que si $\lambda/2 \geqslant 1$, l'intégrale prise entre les limites M_0 et A n'est pas bornée, mais si $\lambda/2 < 1$, l'intégrale est bornée. Le premier cas correspond à un point A où la tangente à la ligne est horizontale :

$$\frac{dz}{ds} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda}{2} \geqslant 1.$$

Le deuxième cas concerne un point A où la tangente n'est pas horizontale

$$\frac{dz}{ds} \neq 0, \quad \lambda = 1, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

101. Considérons, à titre d'exemple, le pendule simple, i.e. le mouvement d'un point pesant M sur un cercle fixe de rayon l situé dans un plan vertical. Disposons l'origine des axes fixes au centre du cercle ; orientons l'axe z suivant la verticale ascendante. Pour procéder à l'étude du mouvement du point M nous partirons de l'intégrale des forces vives

$$v^2 = 2g(a - z).$$

Posons (fig. 97)

$$z = -l \cos \theta, \quad a = -l \cos \alpha.$$

On en déduit

$$a - z = l(\cos \theta - \cos \alpha) = l[(1 - \cos \alpha) - (1 - \cos \theta)] =$$
$$2l \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] ; \quad v = l \frac{d\theta}{dt} .$$

L'intégrale des forces vives s'écrira alors sous la forme

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4gl \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

d'où

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Effectuons la substitution

$$\sin\frac{\theta}{2} = u \sin\frac{\alpha}{2};$$

on aura alors

$$\frac{d\theta}{2} = \frac{k\, du}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{k\, du}{\sqrt{1 - u^2k^2}}$$

avec $k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} < 1$. Après intégration

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}.$$

Le quart de la période d'oscillation T du pendule simple, qui est le temps qu'il met pour aller du point M_0 ($\theta = 0$, $u = 0$) jusqu'au point A ($\theta = \alpha$, $u = 1$), est égal à

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, T = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}.$$

Développons l'expression sous le signe d'intégration selon le binôme de Newton :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2u^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} k^{2n}u^{2n} + \ldots$$

Intégrons terme à terme à l'aide de la formule de Wallis :

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}\, du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}.$$

On obtient

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{2^2}k^2 + \ldots + \left(\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \ldots\right].$$

Lorsque k et α tendent vers zéro, on trouve pour des oscillations infiniment petites du pendule simple la période

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 5. Equations de Lagrange relatives à un point

102. Supposons maintenant que les équations des liaisons (4.15) sont identiquement vérifiées par rapport à t et à q par les relations suivantes :

$$x = x(q,\ t),\quad y = y(q,\ t),\quad z = z(q,\ t), \tag{4.17}$$

où q désigne une variable réelle. Comme pour une valeur donnée de t les valeurs numériques de q déterminent, en vertu des formules (4.17) pour les coordonnées cartésiennes, la position du point matériel à l'instant t, q est la coordonnée déterminante (holonome). On peut considérer les équations (4.17) comme une représentation paramétrique des équations des liaisons imposées au point matériel. En dérivant les équations (4.15) par rapport au paramètre q on obtient

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q} = 0 \quad (i = 1,\ 2).$$

En multipliant les équations de mouvement écrites sous la forme des équations de Lagrange avec les multiplicateurs (4.16) respectivement par $\partial x/\partial q$, $\partial y/\partial q$, $\partial z/\partial q$ et en additionnant, on obtient, en utilisant les dernières relations ci-dessus,

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q}\right) = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q}. \tag{4.18}$$

L'expression figurant dans le second membre représente la force généralisée

$$Q = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q}.$$

Pour assurer la transformation du premier membre de (4.18), prenons la dérivée totale de la coordonnée x par rapport au temps

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{\partial x}{\partial q}q' + \frac{\partial x}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial x'}{\partial q'} = \frac{\partial x}{\partial q}. \tag{4.19}$$

D'autre part

$$\frac{\partial x'}{\partial q} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)}{\partial q} q' + \frac{\partial \frac{\partial x}{\partial q}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right). \tag{4.20}$$

Des relations analogues à (4.19) et (4.20) peuvent être écrites pour les coordonnées y et z. Le premier membre de l'égalité (4.18) peut être écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q}\right) - m \left(x' \frac{d \frac{\partial x}{\partial q}}{dt} + y' \frac{d \frac{\partial y}{\partial q}}{dt} + z' \frac{d \frac{\partial z}{\partial q}}{dt}\right).$$

En vertu de (4.19) et (4.20) on obtient

$$\frac{d}{dt} m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'}\right) -$$

$$m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q} + y' \frac{\partial y'}{\partial q} + z' \frac{\partial z'}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q},$$

où T désigne la force vive du point matériel

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

En portant l'expression obtenue dans (4.18) il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Ces équations ont été établies par Lagrange.

L'intérêt des équations de Lagrange réside en ce que, pour pouvoir les écrire en termes de la variable déterminante q, il suffit de connaître l'expression de la force vive T en fonction de la coordonnée déterminante q, de sa dérivée q' et du temps t, ainsi que la force généralisée Q. Si les forces dérivent d'une fonction de force U, on a $Q = \frac{\partial U}{\partial q}$ et les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q}. \tag{4.21}$$

La force vive T est de la forme

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

où

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right) q'^2,$$

$$T_1 = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial t}\right) q',$$

$$T_0 = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right).$$

Cherchons maintenant à déduire le théorème des forces vives des équations de Lagrange. Multiplions (4.21) par q' ; après réarrangement on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(q'\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q'} q'' - \frac{\partial T}{\partial q} q' = \frac{\partial U}{\partial q} q'.$$

Le premier terme peut être remanié à l'aide du théorème d'Euler concernant les fonctions homogènes ; les autres termes doivent être complétés jusqu'à la dérivée totale par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) - \frac{dT}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t},$$

ou

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Cette égalité exprime le théorème des forces vives.

Dans le cas où T et U ne dépendent pas explicitement du temps

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

et le théorème des forces vives s'écrit

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) = \frac{dU}{dt}.$$

Après intégration, on obtient l'intégrale des forces vives

$$T_2 - T_0 = U + h.$$

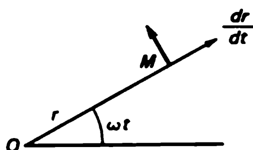


Fig. 98

Si les liaisons ne dépendent pas explicitement du temps $\left(\frac{\partial x}{\partial t} = 0,\right.$ $\left.\frac{\partial y}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0\right)$, $T = T_2$ $(T_1 = 0,\ T_0 = 0)$; T et U sont alors eux aussi indépendants du temps t $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$. L'intégrale des forces vives s'écrira

$$T = U + h.$$

Exemple. Considérons le rayon-vecteur OM passant par un point fixe O autour duquel il tourne avec une vitesse angulaire constante ω (fig. 98). Dans ce cas, T sera déterminé directement à l'aide du théorème de la composition des vitesses du point M exécutant un mouvement complexe

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \omega^2 r^2\right].$$

Si le point M astreint à rester sur le rayon-vecteur OM est soumis à l'action d'une force dérivant d'une fonction de force $V(r)$, son mouvement vérifiera l'intégrale des forces vives

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 = U(r) + h.$$

103. Considérons le cas général. Supposons que les coordonnées cartésiennes x, y, z du point matériel s'expriment sous forme de fonctions déterminées des variables q_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ et du temps t :

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t),\quad y = y(q_1, q_2, q_3, t),\quad z = z(q_1, q_2, q_3, t)\ ; \tag{4.22}$$

on admettra que les variables q_α sont indépendantes les unes des autres. En vertu de (4.22), les variables q_α sont les coordonnées déterminantes (ou holonomes) en ce sens que, connaissant les valeurs numériques des variables q_α, on connaît la position du point matériel considéré.

L'équation (4.22) décrit les liaisons imposées au point ; si $\alpha = 1$, le point est astreint à rester sur une ligne ; si $\alpha = 1, 2$, le point est astreint à rester

sur une surface et si $\alpha = 1, 2, 3$, la relation (4.22) exprime le passage des coordonnées cartésiennes x, y, z aux coordonnées curvilignes q_1; q_2, q_3 (à condition que l'on ne prenne pas en considération les liaisons dites unilatérales).

Si on admet que les liaisons appliquées au point matériel sont parfaitement lisses, leur réaction **R** (R_x, R_y, R_z) est, par définition, orthogonale au vecteur ayant pour projections

$$\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

ce qui implique

$$R_x \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + R_y \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + R_z \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{4.23}$$

Considérons les équations du mouvement du point

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + R_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + R_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + R_z;$$

multiplions-les respectivement par $\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial y}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial z}{\partial q_\alpha}$ et additionnons les résultats. En vertu de (4.23) on obtient

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right) = X \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + Y \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + Z \frac{\partial z}{\partial q_\alpha},$$

et après avoir effectué des transformations semblables à celles que nous avons effectuées plus haut, il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Ce sont les équations de Lagrange. C'est sous cette forme que l'on obtient les équations de mouvement pour les coordonnées déterminantes q_α. Pour pouvoir les écrire il faut connaître la force vive T et les forces généralisées Q_α, mais à condition qu'elles soient données en termes des variables déterminantes.

Donnons un exemple d'étude incorrecte du mouvement plan d'un point matériel (faute de K. Neumann). La force vive T, exprimée à l'aide du rayon-vecteur r et du double de l'aire σ balayée par le rayon-vecteur, s'écrit

$$T = \frac{m}{2}\left(r'^2 + \frac{\sigma'^2}{r^2}\right).$$

Si les forces dérivent d'une fonction de force $U(r)$, $Q_r = \frac{\partial U}{\partial r}$ et $Q_\sigma = 0$. Pour le cas où $q_1 = r$ et $q_2 = \sigma$ on établit facilement les équations de Lagrange, mais ce ne seront pas les équations du mouvement puisque σ n'est pas la coordonnée holonome déterminante.

§ 6. Mouvement relatif

104. Equations du mouvement. Disposons dans un espace fixe un système de coordonnées rectangulaire fixe $O_1x_1y_1z_1$ et un système de coordonnées mobile $Oxyz$, animé d'une certaine vitesse (fig. 99). L'équation du mouvement d'un point absolument libre, soumis à l'action d'une force **F**, est de la forme

$$m\mathbf{j}_a = \mathbf{F}.$$

Compte tenu du théorème de la composition des accélérations dans un mouvement complexe on aura

$$\mathbf{j}_a = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_r + \mathbf{j}_c,$$

où $\mathbf{j}_a$ désigne l'accélération par rapport au repère fixe $O_1x_1y_1z_1$, $\mathbf{j}_r$ désigne l'accélération par rapport au repère mobile $Oxyz$, $\mathbf{j}_e$ est l'accélération d'entraînement, i.e. l'accélération du point figuratif du repère mobile $Oxyz$ où se trouve à l'instant t considéré le point matériel de masse m ; $\mathbf{j}_c$ est l'accélération de Coriolis. On peut donc écrire

$$m\mathbf{j}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{j}_e - m\mathbf{j}_c.$$

Les équations du mouvement par rapport aux axes du repère mobile ont une forme analogue à celle des équations relatives à un repère fixe

$$m\mathbf{j}_r = \mathbf{F}_r,$$

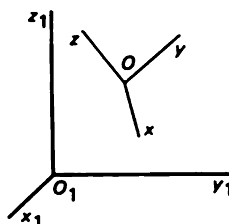


Fig. 99

où la force accélératrice dans le repère mobile s'écrit

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{j}_e - m\mathbf{j}_c,$$

où $-m\mathbf{j}_e$ et $-m\mathbf{j}_c$ sont appelées forces de Coriolis*).

Si le repère mobile est animé par rapport au repère fixe d'un mouvement de translation uniforme et rectiligne on a

$$\mathbf{j}_e = 0, \quad \mathbf{j}_c = 0,$$

et donc $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}$ est l'expression du principe de Galilée**).

En désignant la force de Coriolis liée à l'accélération d'entraînement par $\mathbf{W} = -m\mathbf{j}_e$ et en utilisant l'expression de l'accélération de Coriolis en termes des projections du vecteur vitesse angulaire instantanée des axes mobiles $\omega(p, q, r)$ rapporté au repère mobile, et des projections $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ de la vitesse relative $\mathbf{v}_r$ sur les axes du repère mobile

$$\mathbf{j}_c = 2\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = 2(\omega \times \mathbf{v}_r),$$

les équations du mouvement, écrites en termes des projections sur les axes mobiles, seront de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + W_x - 2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + W_y - 2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + W_z - 2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right),$$

où W_x, W_y, W_z sont les projections de la force de Coriolis $\mathbf{W}$.

105. Théorème des forces vives appliqué au mouvement relatif. Multiplions les équations de mouvement respectivement par dx, dy, dz et som-

*) Généralement ces termes sont appelés forces d'inertie du mouvement relatif : $-m\mathbf{j}_e$ est la force d'inertie d'entraînement et $-m\mathbf{j}_c$ est la force d'inertie de Coriolis.

**) Les systèmes de coordonnées pour lesquels le principe de Galilée est valable sont dits systèmes de Galilée ou d'inertie.

mons les résultats ; on obtient

$$d\,\frac{mv_r^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + m(W_x dx + W_y dy + W_z dz).$$

La variation $d\,\frac{mv_r^2}{2}$ de la force vive dans le mouvement relatif est égale au travail des forces données sur le déplacement réel par rapport au repère mobile plus le travail de la force de Coriolis **W** liée au mouvement d'entraînement effectué sur le même déplacement réel. La force de Coriolis $-m\mathbf{j}_c$ déterminée par l'accélération de Coriolis $\mathbf{j}_c$ n'effectue aucun travail sur le déplacement relatif réel.

106. Variation de l'accélération de la pesanteur avec la latitude. Considérons un point M reposant à la surface de la Terre. La force de pesanteur $m\mathbf{g}$ est la somme géométrique de deux forces : la force d'attraction terrestre $m\mathbf{a}$, dirigée du point M vers le centre des forces d'attraction O, et la force de Coriolis liée à l'accélération d'entraînement $\mathbf{W} = -m\mathbf{j}_e$ (fig. 100). Assimilons la Terre à une sphère de rayon R et de centre O ; dans ces conditions, la force d'attraction est partout la même et passe par le point O. Notons θ la latitude géocentrique de la position du point M et φ sa latitude céleste, i.e. l'angle que fait le plan de l'équateur et la verticale du lieu (direction de la force de pesanteur). En posant que la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre est constante, on peut affirmer que la force de Coriolis $-m\mathbf{j}_e$ se réduit à la force centrifuge et est portée par la perpendiculaire MC dressée du point M sur l'axe de rotation de la Terre ; elle sera numériquement égale à $m\omega^2 R\cos\theta$ et sera orientée suivant CM. On a sur la figure

$$mg\sin\varphi = ma\sin\theta,$$
$$mg\cos\varphi = ma\cos\theta - mR\omega^2\cos\theta.$$

En utilisant la notation

$$\mu = \frac{R}{a}\,\omega^2 \approx \frac{1}{289},$$

on a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\theta}{1-\mu},$$
$$g = a\sqrt{1 - 2\mu\cos^2\theta + \mu^2\cos^2\theta} \approx a(1 - \mu\cos^2\theta),$$

ce qui implique que l'accélération de la pesanteur diminue avec la diminution de la latitude géocentrique du lieu.

107. Chute d'un point pesant sur la Terre. Analysons la chute d'un point matériel pesant sur la Terre (fig. 101). Définissons en un point M de la sur-

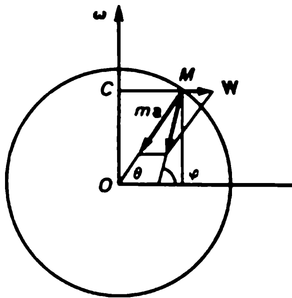


Fig. 100

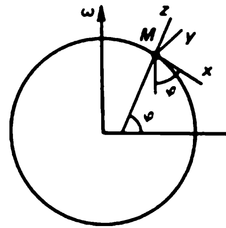


Fig. 101

face terrestre les axes de coordonnées ; orientons l'axe z suivant la verticale ascendante du lieu, l'axe y suivant la tangente à la parallèle en l'orientant vers l'est et l'axe x suivant la tangente au méridien astronomique, orthogonalement aux axes y et z en l'orientant vers le sud. Notons φ la latitude céleste du lieu M.

Les projections de la vitesse angulaire ω de rotation de la Terre sur les axes sont : $-\omega \cos \varphi$, 0, $\omega \sin \varphi$; les projections de la force de pesanteur sont :

$$X + W_x = 0, \quad Y + W_y = 0, \quad Z + W_z = -mg.$$

On en déduit les équations du mouvement d'un point pesant sur la Terre rapportées aux axes $Mxyz$; après division par m elles seront de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin \varphi \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \left(\sin \varphi \frac{dx}{dt} + \cos \varphi \frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \cos \varphi \frac{dy}{dt}.$$

On cherchera la solution par la méthode des approximations successives avec les conditions initiales suivantes :

$$t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad x_0' = y_0' = z_0' = 0.$$

En qualité de première approximation, prenons la solution des équations du mouvement lorsque les seconds membres sont réduits aux conditions initiales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Après intégration, tenant compte des données initiales, on obtient

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{gt^2}{2}.$$

La deuxième approximation correspond aux équations du mouvement dans les seconds membres desquelles on substitue la première approximation trouvée

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\, gt \cos\varphi, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\,;$$

après intégration on trouve

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3}\omega \cos\varphi\, gt^3, \quad z = -\frac{gt^2}{2},$$

i.e. un point pesant tombant sur la Terre en rotation est dévié vers l'est en deuxième approximation.

108. Le pendule de Foucault. Considérons les oscillations infiniment petites du pendule de Foucault, qui est un pendule oscillant à la surface terrestre en rotation. Au point de suspension O du pendule définissons un système de coordonnées locales : l'axe z est dirigé suivant la verticale ascendante, l'axe y est orienté vers l'est suivant la tangente au parallèle passant par le point O, l'axe x est orthogonal aux deux autres axes et pointe donc vers le sud suivant la tangente au méridien. Notons l la longueur du pendule de Foucault, ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre, φ la latitude céleste du point O, N le module de la réaction du fil de suspension du pendule, m la masse du pendule. La force de pesanteur s'exerçant sur le pendule présente dans le système d'axes défini plus haut les projections suivantes :

$$X + W_x = 0, \quad Y + W_y = 0, \quad Z + W_z = -mg.$$

Notons x, y, z les coordonnées du pendule. Les projections de la vitesse angulaire instantanée ω de la rotation de la Terre sur les mêmes axes de coordonnées sont respectivement : $-\omega\cos\varphi$, 0, $\omega\sin\varphi$. Les projections de la force de Coriolis correspondant à l'accélération de Coriolis sont données par la matrice

$$-2m \begin{vmatrix} -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ \dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt} & \dfrac{dz}{dt} \end{vmatrix}.$$

On en tire les équations différentielles décrivant le mouvement du pendule de Foucault :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega\sin\varphi\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega\left(\sin\varphi\frac{dx}{dt} + \cos\varphi\frac{dz}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{l} + 2m\cos\varphi\frac{dy}{dt} - mg.$$

Si on considère des oscillations infiniment petites, on peut poser $z \approx l$. Dans cette approximation les deux premières équations s'écrivent

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega\sin\varphi\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega\sin\varphi\frac{dx}{dt}.$$

En multipliant la première équation par $-y$ et la seconde par x et en additionnant on obtient

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$-2m\omega\sin\varphi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

soit

$$d\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = -\omega\sin\varphi\, d(x^2 + y^2).$$

En introduisant $\varrho^2 = x^2 + y^2$ et l'angle polaire θ de la projection du point matériel sur le plan xy, la relation précédente peut être récrite sous la forme

$$d\left(\varrho^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -\omega\sin\varphi\, d\varrho^2;$$

après intégration on a

$$\varrho^2\frac{d\theta}{dt} = -\omega\sin\varphi\cdot\varrho^2 + C.$$

En supposant qu'à l'instant initial $\varrho = 0$, $C = 0$ et on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega \sin \varphi,$$

ce qui signifie que le plan d'oscillation du pendule tourne de l'est vers l'ouest par le sud. Le plan d'oscillation exécute une rotation complète au cours du temps

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi}.$$

Or $\frac{2\pi}{\omega}$ est le temps de rotation de la Terre autour de son axe, i.e. 24 heures, d'où

$$T = \frac{24}{\sin \varphi} \text{ heures.}$$

CHAPITRE V

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

§ 1. Moments d'inertie

109. Considérons dans l'espace un plan A, un axe L et un point O ; notons δ, Δ, r les distances entre un point de masse m du système matériel et le plan A, l'axe L et le point O.

On peut former les expressions

$$\Pi = \sum m\delta^2, \quad J = \sum m\Delta^2, \quad \mu = \sum mr^2.$$

La sommation s'étend à tous les points du système matériel. Les expressions ci-dessus portent le nom de *moments d'inertie* par rapport au plan A, à l'axe L et au point O.

Les expressions analytiques des moments d'inertie par rapport aux principaux éléments référentiels sont liées par les égalités

$$J_z = \Pi_{xz} + \Pi_{zy}, \quad \mu = \Pi_{zx} + \Pi_{zy} + \Pi_{xy}.$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans orthogonaux passant par l'axe considéré.

Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans orthogonaux se coupant en ce point.

110. Corps solides. La boule. Si les points matériels sont distribués de façon continue, les sommes se réduisent à des intégrales.

Exemple. Déterminer le moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R par rapport à son centre et à son diamètre. On a (fig. 102) :

$$\mu = \int_0^R \varrho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot r^2 = \frac{4}{5}\pi\varrho R^5 = \frac{3}{5}MR^2 ; \quad J_z = \frac{2}{3}\mu ;$$

puisque les moments d'inertie par rapport aux plans diamétraux sont égaux, $\Pi = \frac{1}{3}\mu$, $J_z = 2\Pi$; $M = \frac{4}{3}\pi R^3\varrho$ est la masse de la boule.

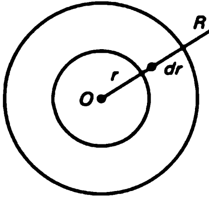


Fig. 102

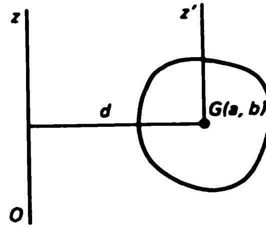


Fig. 103

111. Théorème de Steiner. Menons par le centre de masse d'un système matériel, dont les coordonnées sont a, b, c, les axes x', y', z' qui sont parallèles aux axes du système de coordonnées donné (fig. 103). On aura alors $x = x' + a$, $y = y' + b$ et

$$J_z = \sum m[(x' + a)^2 + (y' + b)^2] = \sum m(x'^2 + y'^2) + M(a^2 + b^2),$$

soit

$$J_z = J_{z'} + Md^2.$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe z est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à un axe z' parallèle à l'axe z et passant par le centre de masse et du produit de la masse totale M par le carré de la distance entre les axes z et z'.

Corollaire. Parmi tous les axes parallèles, l'axe passant par le centre de masse est celui par rapport auquel le moment d'inertie possède la plus faible valeur.

Remarque. Un corollaire analogue vaut pour les moments Π.

Exemple 1. Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre homogène circulaire de masse volumique ϱ, de rayon R et de hauteur unitaire par rapport à son axe et à sa génératrice.

On peut écrire

$$J_0 = \int_0^R \varrho\, 2\pi r\, dr \cdot r^2 = \frac{\pi\varrho}{2} R^4 = \frac{MR^2}{2},$$

où $M = \pi R^2 \varrho$ est la masse du cylindre. En appliquant le théorème de Steiner

$$J_A = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

Exemple 2. Déterminer les moments d'inertie d'une barre homogène de masse volumique ϱ, de longueur l (fig. 104) par rapport à son centre et à son extrémité.

On a

$$J_0 = \int_0^l \varrho \, dx \cdot x^2 = \frac{\varrho l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3},$$

$$J_0 = \frac{Ml^2}{3} = J_G + M\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

d'où

$$J_G = Ml^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{Ml^2}{12}.$$

Exemple 3. Déterminer les moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène de demi-axes a, b, c.

On ramènera ce problème à celui des moments d'inertie d'une boule homogène en mettant à profit le fait que la transformation $x = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$ entraîne la transformation de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en une boule de rayon unité. On en tire

$$\Pi_{xy} = \iiint_E \varrho z^2 \, dx \, dy \, dz = \varrho abc^3 \iiint_B z'^2 dx' \, dy' \, dz' =$$

$$\frac{4}{15} \pi \varrho abc^3 = \left(\frac{4}{3} \pi abc\varrho\right) \frac{c^2}{5} = \frac{Mc^2}{5}.$$

112. Ellipsoïde d'inertie. Considérons un système de points de coordonnées x_i, y_i, z_i et de masses m_i. Pour alléger l'écriture on omettra l'indice i. Considérons le rayon passant par l'origine O des coordonnées et défini par les cosinus directeurs α, β, γ (fig. 105). Le carré de la distance séparant le point m du rayon est

$$\Delta^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2,$$

soit

$$\Delta^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2.$$

Il s'ensuit que le moment d'inertie J d'un système de points matériels par rapport au rayon (α, β, γ) est donné par l'expression

$$J = \sum m\Delta^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \qquad (5.1)$$



Fig. 104

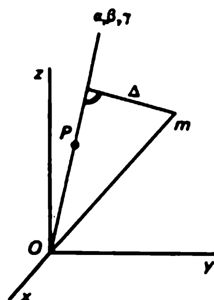


Fig. 105

avec

$$A = \sum m(y^2 + z^2),\ \ldots,\ D = \sum myz,\ \ldots\text{*)}.$$

Définissons sur le rayon un point P tel que $OP = 1/\sqrt{J}$; ce point aura pour coordonnées

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{J}},\quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{J}},\quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{J}}.$$

L'équation du lieu géométrique des points P s'en déduit en utilisant (5.1)

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1.$$

Si le corps possède un volume (lignes non rectilignes) et s'il est fini, la surface de ce lieu géométrique définit un *ellipsoïde*, puisqu'elle est du second degré et ne possède aucun point à l'infini ($J \neq 0$). Cet ellipsoïde est appelé *ellipsoïde d'inertie* du système de points matériels, construit par rapport au point O. L'ellipsoïde d'inertie d'un système donné varie lorsqu'on change de point par rapport auquel on le construit.

On appelle ellipsoïde d'inertie central l'ellipsoïde d'inertie construit par rapport au centre de masse du système de corps solides ou du corps solide considéré.

Les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie sont appelés *axes d'inertie principaux* du corps par rapport au point O.

Remarque. Si $D = 0$ et $E = 0$, l'axe z est l'axe principal de l'ellipsoïde d'inertie.

---

*) A, B, C désignent les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées et D, E, F les moments d'inertie centrifuges par rapport aux mêmes axes.

Théorème. Si l'axe z est l'axe d'inertie principal pour deux de ses points, il sera l'axe d'inertie principal pour n'importe lequel de ses points et passera par le centre de masse du corps.

Nous avons, d'après la figure 106,

$$D = 0, \quad E = 0, \quad D' = 0, \quad E' = 0,$$

$$D = \sum myz = \sum my'(z' + h) = D' + h\sum my',$$

d'où

$$\sum my' = 0, \quad \text{i.e. } \eta' = 0.$$

De même

$$\sum mzx = \sum m(z' + h)x' = E' + h\sum mx',$$

d'où

$$\sum mx' = 0, \quad \text{i.e. } \xi' = 0,$$

où ξ', η' désignent les coordonnées du centre de masse, $\sum mx' = M\xi'$, $\sum my' = M\eta'$. Pour un point arbitraire de l'axe OO'

$$D^* = \sum my^*z^* = \sum my(z - h^*) = D - h^*\sum my = 0, \quad E^* = 0.$$

La proposition inverse est vraie aussi. Si l'axe principal de l'ellipsoïde d'inertie correspondant au point O' passe par le centre de masse, cet axe est l'axe d'inertie principal pour tous ses points.

Corollaire. Les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie central sont axes principaux pour tous leurs points.

N'importe quel ellipsoïde ne peut être ellipsoïde d'inertie, puisque pour ce dernier doivent être vérifiées les inégalités

$$A + B > C, \quad B + C > A, \quad C + A > B.$$

113. Répartition des principaux axes d'inertie dans les solides. Considérons les axes principaux $Oxyz$ de l'ellipsoïde d'inertie central d'un système de points matériels ; l'origine de ces axes constitue le centre de masse du système. Etudions les axes d'inertie principaux d'un corps par rapport à un point O' dont les coordonnées dans le repère $Oxyz$ seront notées ξ, η, ζ (fig. 107). Menons par le point O' une droite dont les cosinus directeurs rapportés aux axes de coordonnées sont α, β, γ.

En notant A, B, C les moments d'inertie d'un système de points matériels par rapport aux axes $Oxyz$, le moment d'inertie du système par rapport à la droite passant par le centre de masse O et dont les cosinus directeurs sont α, β, γ sera égal à

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

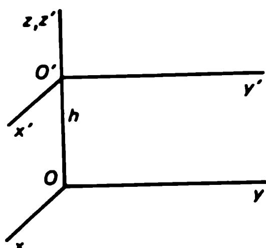


Fig. 106

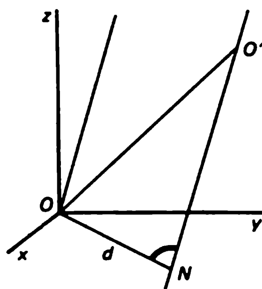


Fig. 107

Le moment d'inertie du système par rapport à la droite passant par le point O' sera donné en vertu du théorème de Steiner par l'expression

$$J' = J + Md^2,$$

où M désigne la masse totale du système et d la distance qui sépare la droite passant par O' du centre de masse O.

La figure 107 laisse apparaître que

$$d^2 = \overline{OO'}^2 - \overline{O'N}^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2.$$

On en tire

$$J' = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2 + M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

La détermination des axes d'inertie principaux du corps considéré par rapport au point O' implique la détermination de l'extrémum de J' correspondant à la condition $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, car tout au moins le plus grand et le plus petit demi-axe de l'ellipsoïde d'inertie construit pour le point O' jouissent de la propriété d'extrémum.

Pour trouver l'extrémum lié on utilisera la méthode du multiplicateur indéterminé λ de Lagrange appliquée à la fonction

$$F = J' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1).$$

On en déduit les conditions d'existence de l'extrémum

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \alpha} &= (A + \lambda)\alpha - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\xi = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \beta} &= (B + \lambda)\beta - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\eta = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \gamma} &= (C + \lambda)\gamma - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\zeta = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

On peut récrire ces équations sous la forme de la proportion

$$\frac{\alpha}{\xi/(A+\lambda)} = \frac{\beta}{\eta/(B+\lambda)} = \frac{\gamma}{\zeta/(C+\lambda)} = M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma) = x. \quad (5.3)$$

En multipliant les équations (5.2) respectivement par $\frac{\xi}{A+\lambda}$, $\frac{\eta}{B+\lambda}$, $\frac{\zeta}{C+\lambda}$ et en additionnant on obtient

$$(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\left(1 - \frac{M\xi^2}{A+\lambda} - \frac{M\eta^2}{B+\lambda} - \frac{M\zeta^2}{C+\lambda}\right) = 0. \quad (5.4)$$

En multipliant les équations (5.2) respectivement par α, β, γ et en additionnant on obtient

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \lambda - M(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2 = 0.$$

L'équation (5.4) ne peut être vérifiée que si l'un des facteurs s'annule. Supposons que ce soit le deuxième facteur qui s'annule

$$\frac{M\xi^2}{A+\lambda} + \frac{M\eta^2}{B+\lambda} + \frac{M\zeta^2}{C+\lambda} = 1. \quad (5.5)$$

Si les moments d'inertie A, B, C sont tous différents, l'équation (5.5) sera du troisième degré et possédera trois racines réelles ; si $A > B > C$, les racines λ_i seront évidemment comprises dans les limites

$$-A < \lambda_3 < -B < \lambda_2 < -C < \lambda_1.$$

En substituant dans l'équation (5.5) les racines λ_i et en assimilant ξ, η, ζ aux coordonnées courantes on obtient les équations des surfaces centrales du second ordre : pour $\lambda = \lambda_1$ l'équation de l'ellipsoïde, pour $\lambda = \lambda_2$ l'équation de l'hyperboloïde à une nappe, pour $\lambda = \lambda_3$ l'équation de l'hyperboloïde à deux nappes.

Si parmi A, B et C on trouve deux moments d'inertie différents, l'équation (5.5) sera du second degré et possédera deux racines réelles ; l'analyse s'en trouve grandement facilitée. Lorsque tous les moments d'inertie A, B et C sont égaux, i.e. lorsque l'ellipsoïde d'inertie central se réduit à une sphère, l'équation (5.5) sera linéaire en λ.

Ces cas particuliers peuvent être établis séparément et on peut aussi les déduire du cas général.

Reprenons le cas $A > B > C$. D'après les formules (5.3), à la racine λ_i correspondent les cosinus directeurs α_i, β_i, γ_i. Nous allons démontrer que les directions qui correspondent à des racines λ_i, λ_k $(i \neq k)$ différentes sont

orthogonales. En effet on a, en vertu de (5.5),

$$\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k = x_i x_k \left(\frac{\xi}{A+\lambda_i}\frac{\xi}{A+\lambda_k} + \frac{\eta}{B+\lambda_i}\frac{\eta}{B+\lambda_k} + \frac{\zeta}{C+\lambda_i}\frac{\zeta}{C+\lambda_k}\right) = \frac{x_i x_k}{\lambda_k - \lambda_i}\left[\left(\frac{\xi^2}{A+\lambda_i} + \frac{\eta^2}{B+\lambda_i} + \frac{\zeta^2}{C+\lambda_i}\right) - \left(\frac{\xi^2}{A+\lambda_k} + \frac{\eta^2}{B+\lambda_k} + \frac{\zeta^2}{C+\lambda_k}\right)\right] = 0.$$

Il s'ensuit que les directions extrêmes sont orthogonales, deux de ces directions correspondent au plus grand et au plus petit demi-axe de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O'. La troisième direction extrême ζ, pour satisfaire à la condition d'orthogonalité, coïncide avec la direction du demi-axe médian de l'ellipsoïde relatif au point O'. Le moment d'inertie par rapport à l'axe déterminé par la racine λ_i est égal à

$$J_i' = M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Cette solution donnant la répartition spatiale des principaux moments d'inertie admet une représentation géométrique compacte. Pour le montrer nous utiliserons les notations suivantes :

$$A = Ma^2, \quad B = Mb^2, \quad C = Mc^2, \quad \lambda = M\varrho,$$

où a, b, c représentent les rayons de giration par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie central. Avec ces notations l'équation (5.5) s'écrit sous la forme

$$f = \frac{\xi^2}{a^2+\varrho} + \frac{\eta^2}{b^2+\varrho} + \frac{\zeta^2}{c^2+\varrho} - 1 = 0.$$

Par le point $O'(\xi, \eta, \zeta)$ passent trois surfaces correspondant aux valeurs $\varrho = \varrho_i$ $(i = 1, 2, 3)$ et cofocales à l'*ellipsoïde giratoire*

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Les normales à ces surfaces coïncident avec les directions des principaux axes d'inertie de corps relatifs au point O', car en vertu de (5.3)

$$\frac{\partial f/\partial\xi}{\alpha_i} = \frac{\partial f/\partial\eta}{\beta_i} = \frac{\partial f/\partial\zeta}{\gamma_i}.$$

Les principaux axes d'inertie d'un système dans l'espace constituent les normales aux surfaces cofocales à l'ellipsoïde giratoire.

114. Points sphériques. Le point O' par rapport auquel l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une boule est dit *point sphérique*. Déterminons les con-

ditions requises pour qu'un système de points matériels possède des points sphériques et définissons ces points. Pour simplifier les calculs menons par le point $O'(\xi, \eta, \zeta)$ les axes de coordonnées $O'x'y'z'$ parallèlement aux axes principaux $Oxyz$ de l'ellipsoïde d'inertie central. Les coordonnées des points matériels du système considéré, rapportées à ces axes, sont liées par les formules

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta.$$

Si le point O' est un point sphérique, les axes $O'x'y'z'$ seront axes d'inertie principaux et de ce fait

$$\sum my'z' = 0, \quad \sum mz'x' = 0, \quad \sum mx'y' = 0\,;$$

la sommation est étendue à tous les points du corps. En utilisant les formules de passage on a

$$0 = \sum my'z' = \sum myz - \eta \sum mz - \zeta \sum my + M\eta\zeta\,; \quad M = \sum m.$$

La somme $\sum myz$ est égale à zéro puisque les axes $Oxyz$ sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie central ; les sommes $\sum mz$, $\sum my$ sont égales à zéro puisque le centre de masse O du corps coïncide avec l'origine des coordonnées $Oxyz$. Par suite

$$\eta\zeta = 0,$$

et de même

$$\zeta\xi = 0, \quad \xi\eta = 0.$$

Ces trois dernières relations seront satisfaites simultanément si deux coordonnées du point O' s'annulent. Cela signifie que les points sphériques peuvent se trouver sur les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie central. Sans préjudice pour la généralité on posera $\xi = 0$, $\eta = 0$. Dans ce cas, pour le point sphérique O', tous les moments d'inertie A', B', C rapportés aux axes $O'x'y'z'$ doivent être égaux et on peut les déterminer à l'aide du théorème de Steiner :

$$A' = A + M\zeta^2 = B' = B + M\zeta^2 = C' = C.$$

En résulte l'égalité $A = B$. S'il existe un point sphérique sur l'axe z, l'ellipsoïde d'inertie central doit être de révolution autour de l'axe z. On obtient ensuite l'équation suivante pour le calcul de ζ :

$$\zeta^2 = \frac{C - A}{M},$$

d'où $C > A$. Si le point sphérique existe, cela signifie que l'ellipsoïde d'inertie central doit être comprimé le long de l'axe de rotation, les deux points

sphériques étant situés sur l'axe de rotation de façon symétrique par rapport au centre de masse O à une distance $\sqrt{\frac{C-A}{M}}$ de ce dernier.

§ 2. Principe d'Euler-Lagrange

115. L'idée du principe fondamental de la dynamique remonte aux élèves de Bernoulli, Hermann et Euler ; ce dernier fut le premier académicien de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg. In « Phoronomia » (1716), Hermann a donné la solution du problème du pendule physique en s'appuyant sur le principe affirmant que si on dirige les « forces motrices » en sens opposé, elles doivent être en équilibre avec les forces de pesanteur.

Euler généralisa ce principe et l'appliqua à la détermination des oscillations des corps flexibles (1740) ainsi qu'à de nombreux autres problèmes de la mécanique.

Sous sa forme la plus générale, ce principe fut formulé par Lagrange. En 1788 parut sa fameuse « Mécanique analytique » où, après une analyse approfondie des problèmes déjà résolus et des suggestions qui en découlaient, Lagrange mit en relief l'idée de Hermann et Euler et la généralisa. Reprenons leur raisonnement. Soient M_ν les points d'un système matériel, m_ν les masses de ces points matériels, $\mathbf{r}_\nu$ leurs rayons-vecteurs, $\mathbf{F}_\nu$ les vecteurs des forces s'exerçant sur ces points. On suppose que le système est limité par des liaisons parfaites. Sous l'action des forces appliquées, le point M_ν, étant soumis aux liaisons imposées, acquiert dans son mouvement réel une accélération $\mathbf{j}_\nu$ (fig. 108). Si on applique au point M_ν encore une force égale à $-m_\nu\mathbf{j}_\nu$, cette dernière pourrait supprimer la variation de la vitesse de M_ν. Le point serait alors amené à un état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, car s'il était libre, la force $m_\nu\mathbf{j}_\nu$ suffirait pour lui communiquer une accélération $\mathbf{j}_\nu$. Il en va de même pour tous les autres points ($\nu = 1, \ldots, n$).

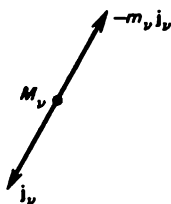


Fig. 108

Si on se représente que l'on communique à chaque corps un mouvement en sens opposé à celui qu'il devrait avoir, le système sera amené à l'état de repos ... il doit donc exister un équilibre ... entre les forces qui sont susceptibles de déterminer ce mouvement *). Il s'ensuit que

$$\sum (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{j}_\nu)\delta r_\nu = 0.$$

Lagrange, qui généralisa les conceptions d'Euler et Hermann, appela sa généralisation principe de D'Alembert, quoique la méthode utilisée par ce dernier impliquait des décompositions inutilement compliquées des mouvements afin de déterminer les réactions de liaisons. Nous l'appellerons principe d'Euler-Lagrange **).

Plus tard on négligea l'essence de ce principe selon lequel c'est par la pensée que l'on doit associer les forces $-m_\nu \mathbf{j}_\nu$ aux points et, de ce fait, on dénomma ces forces fictives forces d'inertie et on perdit son temps à prouver que cette force existe réellement.

116. Liaisons linéaires. Considérons un espace fixe (euclidien) et un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$. Le système matériel considéré se compose de n points matériels de masses m_ν dont les coordonnées sont x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Supposons que le mouvement du système est restreint par des liaisons linéaires que nous dénommerons linéaires en ce sens que les vitesses x_ν', y_ν', z_ν' satisfont à des relations linéaires telles que

$$\sum (a_{j\nu}x_\nu' + b_{j\nu}y_\nu' + c_{j\nu}z_\nu') + l_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{5.6}$$

où a, b, c, l sont des fonctions déterminées du temps t et des coordonnées x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Les primes désignent les dérivées par rapport au temps, i.e. x_ν', y_ν', z_ν' représentent les projections de la vitesse du point m_ν sur les axes de coordonnées.

Les *déplacements virtuels* δx_ν, δy_ν, δz_ν du point m_ν sont déterminés par le système d'équations

$$\sum (a_{j\nu}\delta x_\nu + b_{j\nu}\delta y_\nu + c_{j\nu}\delta z_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{5.7}$$

Si les l_j sont différents de zéro, les déplacements réels dx_ν, dy_ν, dz_ν, ne pouvant vérifier les équations (5.7), ne sont pas compris dans les déplacements virtuels. Si le système des équations différentielles (5.6) caractérisant les liaisons se laisse intégrer en ce sens qu'il se réduit au système $df_j(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0$ ($j = 1, \ldots, m$), les liaisons sont dites *holonomes* ; et si les équations (5.6) ne se laissent pas intégrer, les liaisons sont dites *non holonomes*.

*) J. Lagrange. *Dynamique analytique*, 1788, t. 1, section 1, paragraphe 11.

**) Dans la littérature scientifique on l'appelle principe de D'Alembert-Lagrange.

En multipliant les équations (5.6) par dt on obtient

$$\sum (a_{j\nu}dx_\nu + b_{j\nu}dy_\nu + c_{j\nu}dz_\nu) + l_j dt = 0 \quad (j = 1, \ldots, m),$$

où dx_ν, dy_ν, dz_ν désignent les projections sur les axes du déplacement réel du point m_ν au cours du temps dt. On voit que les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν, définis par les équations (5.7), peuvent être assimilés à des déplacements élémentaires correspondant à des liaisons « gelées » pour lesquelles t est fixe, ce qui justifie que dans la dernière formule on pose $dt = 0$.

Il convient de remarquer que les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν ne représentent pas, en fait, des déplacements entre des positions infiniment proches du système mécanique qui ne mettent pas en défaut les liaisons « gelées » si ces dernières, pour un t donné,

$$\sum (a^0_{j\nu}dx_\nu + b^0_{j\nu}dy_\nu + c^0_{j\nu}dz_\nu) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

ne sont pas intégrables. Ici $a^0_{j\nu}$, $b^0_{j\nu}$, $c^0_{j\nu}$ désignent que t a une valeur fixée dans les fonctions $a_{j\nu}$, $b_{j\nu}$, $c_{j\nu}$.

Si les équations des liaisons (5.6) sont intégrables (cas des liaisons holonomes), après intégration les liaisons seront décrites par des équations de la forme

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.8}$$

Dans ce cas les équations décrivant les déplacements virtuels sont conformes à la définition (5.7) et se présentent sous la forme

$$\sum \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Il s'ensuit que les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν des systèmes soumis à des liaisons holonomes non seulement constituent des déplacements élémentaires correspondant à des liaisons « gelées » pour un t donné mais sont des déplacements entre des états infiniment proches du système mécanique qui n'affectent pas les liaisons « gelées » pour un t donné*).

Pour les déplacements réels dx_ν, dy_ν, dz_ν effectués au cours du temps dt, on obtient, après dérivation par rapport au temps des équations des liaisons (5.8) identiquement vérifiées lors du mouvement, les équations sui-

*) On retrouve ici une idée sur laquelle l'auteur revient souvent : dans le cas de liaisons non holonomes deux états infiniment proches du système, permis par les liaisons, ne peuvent pas toujours être reliés par un chemin infiniment court n'affectant pas les liaisons. Pour les liaisons holonomes on peut toujours le faire.

vantes :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

On en conclut que dans le cas de liaisons dépendant du temps les déplacements réels ne figurent pas parmi les déplacements virtuels. Si les liaisons sont holonomes et ne dépendent pas du temps $\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0$ ($j = 1, \ldots, m$), les déplacements réels figurent parmi les déplacements virtuels.

117. Liaisons parfaites. Supposons que les points m_ν du système mécanique considéré sont soumis à des forces accélératrices données caractérisées par les projections X_ν, Y_ν, Z_ν sur les axes du repère $Oxyz$. Posons que les mouvements de ce système sont limités par des liaisons linéaires ; notons δx_ν, δy_ν, δz_ν les déplacements virtuels du point m_ν soumis à l'action de ces liaisons.

Les liaisons auxquelles nous aurons affaire dans ce qui suit sont régies par l'axiome suivant : l'action exercée par les liaisons sur un système mécanique peut être remplacée par les réactions que les liaisons exercent sur les points m_ν du système.

Les projections d'une réaction s'exerçant sur le point m_ν seront notées $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$. Cela signifie que si on adjoint aux forces données les réactions, on pourra poser que notre système mécanique est constitué de points absolument libres de masses m_ν soumis à l'action des forces $X_\nu + R_{\nu x}$, $Y_\nu + R_{\nu y}$, $Z_\nu + R_{\nu z}$. On fera l'étude des *liaisons* dites *parfaites* pour lesquelles l'axiome suivant est vrai : la somme des travaux produits par les réactions des liaisons parfaites sur les déplacements virtuels est égale à zéro

$$\sum (R_{\nu x} \delta x_\nu + R_{\nu y} \delta y_\nu + R_{\nu z} \delta z_\nu) = 0.$$

Si la nécessité nous oblige à considérer des liaisons imparfaites, les composantes des réactions de celles-ci, ne vérifiant pas la condition d'être parfaites, seront incorporées aux forces données.

118. Principe d'Euler-Lagrange. L'axiome des liaisons parfaites permet de formuler le principe fondamental de la dynamique. En effet, dès que l'on remplace les liaisons par les réactions, on peut poser que les points m_ν sont absolument libres et soumis à l'action des forces données X_ν, Y_ν, Z_ν et des réactions des liaisons $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$. Les points libres se conforment aux équations de mouvement de Newton

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = X_\nu + R_{\nu x}, \qquad m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = Y_\nu + R_{\nu y},$$
$$m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = Z_\nu + R_{\nu z} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{5.9}$$

On en tire les expressions de $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ que l'on porte dans la formule exprimant l'axiome des liaisons parfaites ; on obtient ainsi

$$\sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - X_\nu \right) \delta x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - Y_\nu \right) \delta y_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} - Z_\nu \right) \delta z_\nu \right] = 0. \quad (5.10)$$

Les accélérations d^2x_ν/dt^2, d^2y_ν/dt^2, d^2z_ν/dt^2 des points m_ν lors d'un mouvement réel du système mécanique limité par des liaisons parfaites doivent nécessairement satisfaire à la relation (5.10) pour tous les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν compatibles avec les liaisons imposées.

Nous allons démontrer que la formule (5.10) est suffisante pour déterminer les accélérations réelles. Assimilons notre système à de points absolument libres soumis à l'action des forces $X_\nu + R_{\nu x}$, $Y_\nu + R_{\nu y}$, $Z_\nu + R_{\nu z}$. On peut le faire en vertu de l'axiome relatif au remplacement des liaisons par leurs réactions. Les déplacements virtuels des points absolument libres seront notés $\bar{\delta} x_\nu$, $\bar{\delta} y_\nu$, $\bar{\delta} z_\nu$; ces quantités sont arbitraires et indépendantes. L'application de la formule (5.10) au cas considéré fournit nécessairement le résultat suivant :

$$\sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - X_\nu - R_{\nu x} \right) \bar{\delta} x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - Y_\nu - R_{\nu y} \right) \bar{\delta} y_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} - Z_\nu - R_{\nu z} \right) \bar{\delta} z_\nu \right] = 0.$$

Etant donné que $\bar{\delta} x_\nu$, $\bar{\delta} y_\nu$, $\bar{\delta} z_\nu$ sont tout à fait arbitraires, l'application du théorème de Lagrange permet d'en tirer les relations suivantes :

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = X_\nu + R_{\nu x}, \qquad m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = Y_\nu + R_{\nu y},$$

$$m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = Y_\nu + R_{\nu z} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Mais ce sont les équations (5.9). Nous avons donc prouvé que la formule (5.10) est suffisante. Par conséquent, la relation (5.10) exprime un principe suffisant pour résoudre les problèmes de la dynamique. Nous l'appelons *principe d'Euler-Lagrange.*

§ 3. Théorèmes généraux

119. Les réactions des liaisons $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ ne figurent pas dans l'expression du principe d'Euler-Lagrange (5.9). Il s'ensuit que les équations que l'on peut en déduire seront des équations différentielles de mouvement ne contenant pas de réactions des liaisons inconnues.

Si on décompose l'ensemble des déplacements virtuels d'un système en un système de composantes indépendantes des déplacements et si on substitue ces dernières dans le principe d'Euler-Lagrange, on obtiendra un système complet d'équations différentielles indépendantes de mouvement.

Si on choisit parmi l'ensemble des déplacements virtuels un certain déplacement et si on le porte dans le principe d'Euler-Lagrange, la relation ainsi obtenue sera l'une des équations différentielles de mouvement ou un corollaire de ces équations. Nous allons illustrer cette conclusion par plusieurs propositions très générales.

120. Théorème du mouvement du centre de masse. Supposons que parmi les déplacements virtuels d'un système mécanique figure un déplacement de translation le long de l'axe x comme s'il s'agissait d'un corps solide

$$\delta x_\nu = a, \quad \delta y_\nu = 0, \quad \delta z_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, m).$$

En portant ces valeurs des déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν dans le principe d'Euler-Lagrange on obtient après élimination de a

$$\sum \left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right) = 0.$$

Or

$$\sum m_\nu x_\nu = M\xi,$$

où $M = \sum m_\nu$ est la masse totale du système mécanique et ξ la coordonnée du centre de masse du système sur l'axe x. La dernière formule peut donc s'écrire

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\nu,$$

ce qui s'énonce : si le système matériel limité par des liaisons parfaites peut effectuer un mouvement de translation comme un corps solide le long de l'axe x, le centre de masse du système se déplacera le long de l'axe x comme s'il était soumis à l'action de toutes les forces $\sum X_\nu$ et comme si toute la masse M du système y était concentrée.

On peut simplifier le théorème.

Divisons les forces X_ν, Y_ν, Z_ν en forces extérieures X_ν^e, Y_ν^e, Z_ν^e et en forces

intérieures X_ν^i, Y_ν^i, Z_ν^i :

$$X_\nu = X_\nu^e + X_\nu^i, \quad Y_\nu = Y_\nu^e + Y_\nu^i, \quad Z_\nu = Z_\nu^e + Z_\nu^i,$$

en entendant par forces intérieures celles qui se laissent décomposer en couples de forces de même module, portées par la même droite, de sens opposés et appliquées en différents points du système considéré (forces d'interaction).

Si le système matériel peut effectuer un déplacement de translation virtuel le long de l'axe x comme si c'était un corps solide, le théorème du mouvement du centre de masse s'écrira sous la forme

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\nu^e,$$

étant donné que pour les forces intérieures

$$\sum X_\nu^i = 0.$$

Si on a encore $\sum X_\nu^e = 0$, on obtient par intégration de l'équation ci-dessus

$$\xi = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 t + \xi_0,$$

où ξ_0 et $(d\xi/dt)_0$ désignent à l'instant $t = 0$ la coordonnée ξ et la vitesse $d\xi/dt$.

Considérons quelques conséquences que l'on peut tirer de ce théorème général.

Si le système matériel peut effectuer un mouvement de translation comme un corps solide le long des axes x, y, z, les lois du mouvement du centre de masse par rapport à ces axes s'écrivent sous la forme

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\nu, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_\nu, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z_\nu,$$

i.e. le centre de masse du système considéré, ayant pour coordonnées ξ, η, ζ, se déplace dans l'espace comme si la masse totale M du système y était concentrée et toutes les forces actives y étaient appliquées.

Remarque. C'est cette proposition sur le mouvement du centre de masse d'un système matériel qui justifie l'intérêt pratique de la dynamique du point.

Exemple. Problème des deux corps. Notons S le Soleil, P une planète et O le centre de masse du Soleil et de la planète (fig. 109). On a affaire à la loi du mouvement du centre de masse du Soleil et de la planète ; dans les équations du mouvement du centre de masse les forces d'interaction se détruisent puisque ce sont des forces intérieures. Il s'ensuit que le centre

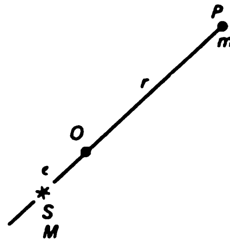


Fig. 109

de masse O est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Adoptons un référentiel d'inertie dont l'origine est placée en O puisqu'on peut poser que O est un point fixe. Notons M la masse du Soleil, m la masse de la planète. La planète est soumise à l'action de la force d'attraction de Newton

$$F = \frac{Mm}{SP^2}$$

si l'unité de mesure est telle que la constante d'attraction $f = 1$. Comme $M\varepsilon = mr$, on a

$$F = \frac{Mm}{(r+\varepsilon)^2} = \frac{Mm}{(1 + m/M)^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\mu m}{r^2} \qquad \left(\mu = \frac{M}{(1+m/M)^2}\right).$$

On peut donc admettre que sur la planète s'exerce une force d'attraction émanant du point fixe O. Cela justifie la position du problème du mouvement des planètes dans la dynamique du point matériel puisqu'il s'agit du mouvement d'un point matériel subissant l'attraction d'un pôle fixe.

Exemple. Un exemple d'application du théorème général concernant le mouvement du centre de masse des systèmes matériels est l'établissement de l'équation du mouvement d'un corps de masse variable portant le nom d'équation de Mechtcherski.

Soit un système matériel soumis à l'action des forces $\mathbf{F}_\nu$ connues. Nous considérerons une certaine surface de référence S_t et une masse $m(t)$ contenue sous cette surface. Le rayon-vecteur du centre de la masse $m(t)$ contenue à l'intérieur de la surface de référence S_t rapporté à un système de coordonnées fixe sera désigné par $\xi(t)$.

A l'instant $t + dt$, la masse $m(t)$ qui était contenue auparavant à l'intérieur de la surface de référence S_t sera reportée à l'intérieur de la surface S_{t+dt} correspondant à l'instant $t + dt$ et à l'extérieur de cette surface. Notons $m + dm$ la masse contenue à l'intérieur de la surface S_{t+dt} et $-dm$ la masse se trouvant hors de S_{t+dt}. On supposera que la séparation de la

masse de la surface S s'effectue sous l'action de forces qui sont intérieures à la masse $m(t)$ et que les liaisons existantes autorisent les déplacements virtuels de translation du système matériel comme si c'était un corps solide.

Considérons le système de points matériels contenu à l'instant t à l'intérieur de la surface de référence S_t pendant l'intervalle de temps compris entre t et $t + dt$ comme un système de masse constante en supposant que la masse se dégage de la surface S. Notons M la masse constante du système ainsi considéré.

Avec les hypothèses faites, l'application du théorème général du mouvement du centre de masse conduit à

$$d\left(M\frac{d\xi}{dt}\right) = \sum \mathbf{F}_{\nu} dt.$$

On peut mettre la dérivée $\frac{d}{dt}$ en facteur du fait que M est constant. On peut écrire aussi

$$\left[M\frac{d\xi}{dt}\right]_{t+dt} - \left[M\frac{d\xi}{dt}\right]_{t} = \sum \mathbf{F}_{\nu} dt.$$

Or

$$\left[M\frac{d\xi}{dt}\right]_{t} = m\mathbf{v},$$

où $m(t)$ désigne la masse contenue à l'intérieur de la surface de référence S_t, $\mathbf{v}$ est la vitesse absolue du centre de masse $m(t)$ et

$$\left[M\frac{d\xi}{dt}\right]_{t+dt} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (-dm)\mathbf{u},$$

où $m + dm$ est la masse contenue à l'intérieur de la surface S_{t+dt}, $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ le vecteur vitesse absolue du centre de masse et $\mathbf{u}$ le vecteur vitesse absolue des masses $(-dm)$ qui se sont échappées de la surface S_{t+dt}. On en tire

$$m\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v} + dm\cdot\mathbf{v} + dm\,d\mathbf{v} - \mathbf{u}\,dm - m\mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_{\nu} dt.$$

En négligeant le terme du second ordre $dm\,d\mathbf{v}$ on a

$$m\,d\mathbf{v} + dm(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \sum \mathbf{F}_{\nu} dt$$

ou en définitive

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{u} - \mathbf{v})\frac{dm}{dt} + \sum \mathbf{F}_{\nu}.$$

Cette équation, qui a été établie par Mechtcherski, joue un rôle important pour la propulsion par réaction.

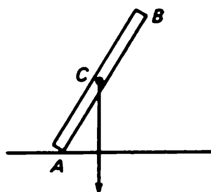


Fig. 110

Les développements précédents permettent de conclure que le terme $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\frac{dm}{dt}$ représente la force accélératrice de réaction. Le vecteur $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{v}_r$ est le vecteur vitesse relative des masses qui se sont séparées de la surface de référence.

La démonstration de l'équation de Mechtcherski pour le cas où certaines masses s'échappent de la surface de référence et d'autres y pénètrent s'effectue de façon analogue à la démonstration précédente.

Le théorème du mouvement du centre de masse permet d'expliquer le phénomène de recul accompagnant le tir d'une arme à feu, la loi du mouvement du centre de masse des obus Shrapnell qui éclatent dans le vide, etc.

Problème. Une tige homogène pesante AB d'une longueur $2l$, s'appuyant par une extrémité A sur la surface lisse d'une table horizontale (fig. 110), se trouve d'abord au repos et fait un angle α avec le plan de la table. Ensuite la tige se met à tomber sous l'action de la force de pesanteur. Déterminer la trajectoire de l'extrémité B.

121. Théorème sur le moment de la quantité de mouvement. Posons que parmi tous les déplacements virtuels d'un système matériel on trouve la rotation autour d'un axe fixe z que le système exécute comme s'il était un corps solide. Notons $\delta\varphi$ la rotation virtuelle élémentaire du système autour de l'axe z. En appliquant le théorème d'Euler on a

$$\begin{pmatrix}\delta x_\nu\\ \delta y_\nu\\ \delta z_\nu\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \delta\varphi\\ x_\nu & y_\nu & z_\nu\end{Vmatrix}=\begin{pmatrix}-y_\nu\delta\varphi\\ +x_\nu\delta\varphi\\ 0\end{pmatrix}\qquad (\nu=1,\ \ldots,\ n).$$

En portant ces valeurs de déplacements virtuels dans le principe d'Euler-Lagrange on obtient après quelques transformations

$$\frac{d}{dt}\sum m_\nu\left(x_\nu\frac{dy_\nu}{dt}-y_\nu\frac{dx_\nu}{dt}\right)=\sum(x_\nu Y_\nu-y_\nu X_\nu).$$

Il s'ensuit que pour un système limité par des liaisons parfaites mais pouvant tourner autour d'un axe à l'instar d'un corps solide, le taux de variation du moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe z

$$K_z = \sum m_\nu \left(x_\nu \frac{dy_\nu}{dt} - y_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \right)$$

est égal au moment résultant des forces données par rapport à l'axe z

$$M_z = \sum (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu).$$

Cela implique que

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z.$$

La formule obtenue peut être simplifiée.

Divisons les forces appliquées X_ν, Y_ν, Z_ν en forces extérieures X_ν^e, Y_ν^e, Z_ν^e et intérieures X_ν^i, Y_ν^i, Z_ν^i :

$$X_\nu = X_\nu^e + X_\nu^i, \quad Y_\nu = Y_\nu^e + Y_\nu^i, \quad Z_\nu = Z_\nu^e + Z_\nu^i.$$

Le vecteur moment des forces intérieures par rapport à n'importe quel point est égal à zéro puisque les moments des forces opposées **f** et $-$**f** par rapport à O sont égaux, portés par la même droite et opposés. De ce fait

$$\sum (x_\nu Y_\nu^i - y_\nu X_\nu^i) = 0$$

et par conséquent

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum (x_\nu Y_\nu^e - y_\nu X_\nu^e).$$

Si $M_z = 0$, après intégration de cette équation on aura la première intégrale

$$K_z = \text{const},$$

i.e. l'intégrale des aires.

Si le système peut non seulement tourner autour d'un axe z mais tourne effectivement autour de cet axe avec une vitesse angulaire ω, on aura

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_\nu}{dt} \\ \frac{dy_\nu}{dt} \\ \frac{dz_\nu}{dt} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} -y_\nu \omega \\ x_\nu \omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

On en tire

$$K_z = \omega \sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) = J_z \omega,$$

où J_z est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe z. Le théorème sur le moment des quantités de mouvement s'exprimera alors par

$$\frac{d}{dt} J_z \omega = M_z. \tag{5.11}$$

Corollaire. Si un système matériel peut tourner autour des axes x, y, z comme le ferait un corps solide, on doit avoir

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M},$$

i.e. la vitesse de déplacement de l'extrémité du vecteur moment des quantités de mouvement est égale au moment des forces appliquées.

Remarque. Le théorème du moment des quantités de mouvement se fonde sur l'hypothèse que parmi tous les déplacements virtuels il existe la *rotation* du système autour d'un *axe fixe* z comme s'il était un corps solide. Nous avons également utilisé la notion d'axes fixes pour mettre l'expression sous sa forme définitive.

De quoi s'agit-il ? Comme les variables x_ν, y_ν figurant dans la relation fondamentale proviennent des formules des déplacements virtuels $\delta x_\nu = -y_\nu \delta\varphi$, $\delta y_\nu = x_\nu \delta\varphi$ et peuvent être dérivées par rapport à t, la formule du déplacement virtuel doit concerner non pas un certain état instantané, mais un intervalle de temps déterminé, même s'il est court. Dans l'hypothèse de la rotation virtuelle autour d'un axe fixe il ne s'agit pas d'un état instantané (par exemple d'un axe de rotation instantané) mais de la possibilité d'effectuer une rotation autour d'un axe qui reste fixe pendant un intervalle de temps fini, même s'il est court.

L'hypothèse supplémentaire selon laquelle le système tourne réellement autour d'un *axe fixe* z avec la vitesse angulaire ω implique l'état de rotation du système, comme s'il était un corps solide, autour d'un axe fixe z pendant un certain intervalle de temps, même s'il est court, car par la suite dans la formule

$$\frac{d}{dt} J_z \omega = M \qquad (K_z = J_z \omega)$$

le produit $J_z \omega$ doit être soumis à une dérivation.

Exemple 1. Sur une poulie impondérable de rayon R pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe O on fait passer une corde dont les bouts de longueurs a et a' pendent librement (fig. 111). Deux hom-

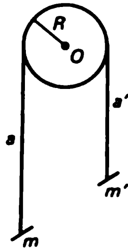


Fig. 111

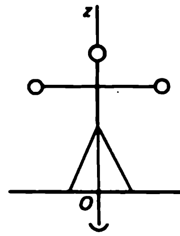


Fig. 112

mes de masses m et m' saisissent les cordes et grimpent, ils parviennent en même temps jusqu'à l'horizontale passant par l'axe de la poulie. On admettra que les cordes occupent une position verticale. Déterminer l'instant où les grimpeurs arrivent tout en haut.

Le système assimilé à un solide peut tourner autour de l'axe de la poulie et on peut donc lui appliquer le théorème du moment de la quantité de mouvement du système autour de l'axe de la poulie

$$\frac{dK_0}{dt} = mgR - m'gR = Rg(m - m') ;$$

or

$$K_0 = mvR - m'v'R,$$

v et v' étant les vitesses verticales (le sens positif est celui de haut en bas) de déplacement des hommes de masses m et m'. Par conséquent

$$(mv - m'v') = g(m - m')t ;$$

en intégrant avec les conditions initiales indiquées on a

$$-(ma - m'a') = g(m - m')\frac{T^2}{2}.$$

Exemple 2. Au centre d'une plateforme tournant autour de l'axe vertical z se tient un homme les bras tendus et tenant dans ses mains des haltères de masse m (fig. 112). L'homme et la plateforme sont mis en rotation autour de l'axe z avec une vitesse angulaire ω_1. Quelle sera la vitesse angulaire ω_2 de l'homme et de la plateforme sur laquelle il se tient s'il plie les bras ?

Notons J le moment d'inertie de l'homme et de la plateforme par rapport à l'axe z ; on supposera que les bras ne pèsent rien, r_1 et r_2 sont les distances entre l'axe z et les haltères lorsque les bras sont tendus et lorsqu'ils sont pliés. Comme le système peut tourner autour de l'axe z comme un

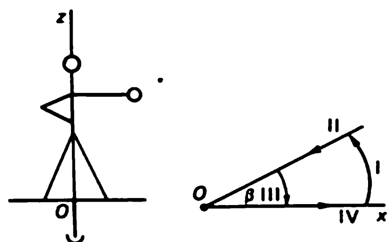


Fig. 113

corps solide, l'application du théorème du moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe z conduit à la relation

$$\frac{dK_z}{dt} = 0$$

puisque les forces intérieures et les forces de pesanteur ne fournissent aucun moment par rapport à l'axe z. En intégrant on obtient

$$(J + 2mr_1^2)\omega_1 = (J + 2mr_2^2)\omega_2.$$

Exemple 3. Au centre d'une plaque horizontale pouvant tourner autour d'un axe vertical fixe z se tient un homme ayant dans sa main, le bras tendu, un poids de masse m (fig. 113). L'homme fait décrire au poids qu'il tient un mouvement dont la projection sur la plaque est représentée sur la figure 113 à droite. De quel angle α tournera la plaque à la suite de ce mouvement ?

Soient J le moment d'inertie de l'homme et de la plaque tournante par rapport à l'axe z ; r_1 et r_2 les distances entre la masse m tenue dans la main de l'homme le bras tendu et le bras plié et l'axe z. Nous compterons l'angle β que décrit la main, lorsque l'homme plie le bras, à partir de la ligne Ox tracée sur la plaque ; l'angle α de rotation de la plaque est compté par rapport à un plan vertical fixe passant par l'axe z. A l'instant initial $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$. Etant donné que le système peut tourner d'un bloc autour de l'axe z, l'application du théorème du moment de la quantité de mouvement au parcours I s'écrit

$$J\alpha' + mr_1^2(\alpha' + \beta') = 0,$$

et après intégration

$$J\alpha_1 + mr_1^2(\alpha_1 + \beta_1) = 0.$$

Sur les parcours II et IV les angles α et β ne varient pas. Sur le parcours III on a

$$J\alpha_2 + mr_2^2(\alpha_2 - \beta_2) = 0\,;$$

comme $\beta_1 = \beta_2 = \beta$,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = -\beta \frac{Jm(r_1^2 - r_2^2)}{(J + mr_1^2)(J + mr_2^2)}.$$

Exemple 4. Problème de Joukovski. Soient un mur vertical parfaitement lisse et un sol horizontal parfaitement lisse. Une poutre AB dont le poids P est concentré en son milieu peut glisser en gardant le contact, par ses deux bouts A et B, avec le mur et le sol (fig. 114). Un animal de poids Q court sur la poutre, son mouvement étant décrit par la loi $s = s(t)$. Quelle doit être cette loi pour que la poutre ne bouge pas ?

Si l'animal court de telle façon que la poutre ne bouge pas, parmi les déplacements virtuels du système on trouve une rotation en bloc autour du point fixe C où se coupent les perpendiculaires dressées en A et B respectivement au mur et au sol. D'après le théorème du moment de la quantité de mouvement du système par rapport au point C.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{Q}{g}\frac{ds}{dt}(2a\cos\theta\sin\theta)\right] = Pa\cos\theta + Q(2a - s)\cos\theta\,;$$

$2a$ désigne la longueur de la poutre AB, θ l'angle aigu que fait la poutre avec le sol, s la distance entre l'animal assimilé à un point matériel et l'extrémité A de la poutre. Vu que les forces d'interaction de l'animal avec la poutre sont des forces intérieures, elles ne figurent pas dans l'équation des moments de la quantité de mouvement. On en tire

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-g}{2a\sin\theta}\,s + \frac{(P + 2Q)g}{2Q\sin\theta},$$

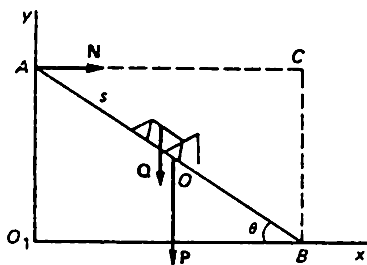


Fig. 114

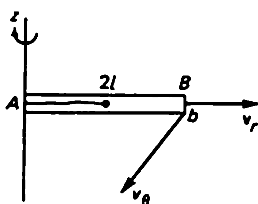


Fig. 115

soit

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{g}{2a\sin\theta}\,\sigma,$$

avec $\sigma = s - \frac{P + 2Q}{Q}\,a$. Après intégration on obtient

$$\sigma = A\cos\sqrt{\frac{g}{2a\sin\theta}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{2a\sin\theta}}\,t.$$

Exemple 5. Un tube AB horizontal, homogène et parfaitement lisse, de masse M et de longueur $2l$, tourne avec une vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe vertical z fixé à l'extrémité A du tube (fig. 115). On place au milieu du tube une bille de masse m attachée par un fil impondérable à l'extrémité A. A un certain moment on rompt le fil en le brûlant. Déterminer la vitesse angulaire ω de rotation du tube lorsque la bille s'en échappe.

Si ω est la vitesse angulaire de rotation du tube à l'instant où la bille en sort, la vitesse transversale de la bille sera alors $v_\theta = 2l\omega$; le moment de la quantité de mouvement de la bille par rapport à l'axe z à l'instant où elle sort du tube est indépendant de la vitesse radiale $\mathbf{v}_r$ de la bille, car cette vitesse passe par l'axe de rotation z. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement par rapport à un axe on obtient après intégration

$$(J + ml^2)\omega_0 = J\omega + m(2l\omega)2l.$$

On en tire ω.

Qu'est-ce que change dans ce problème si le tube ne sera pas parfaitement lisse ?

122. Théorème des forces vives. Si les déplacements réels d'un système mécanique font partie de ses déplacements virtuels

$$\delta x_\nu = dx_\nu, \quad \delta y_\nu = dy_\nu, \quad \delta z_\nu = dz_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

on peut écrire

$$\sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - X_\nu \right) dx_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} - Y_\nu \right) dy_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} - Z_\nu \right) dz_\nu \right] = 0,$$

ou encore

$$dT = \sum (X_\nu dx_\nu + Y_\nu dy_\nu + Z_\nu dz_\nu).$$

Autrement dit, si les liaisons sont parfaites et si les déplacements réels du système mécanique font partie de ses déplacements virtuels, la différentielle de la force vive $T = \sum \frac{m_\nu}{2} (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2)$ est égale au travail que les forces actives X_ν, Y_ν, Z_ν appliquées au système effectuent au cours des déplacements réels dx_ν, dy_ν, dz_ν. Cette proposition exprime le théorème des forces vives.

Si les forces X_ν, Y_ν, Z_ν dérivent en outre d'une fonction de force $U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ indépendante du temps

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

le théorème des forces vives selon l'égalité

$$\sum (X_\nu dx_\nu + Y_\nu dy_\nu + Z_\nu dz_\nu) = dU$$

se met sous une forme simplement intégrable

$$dT = dU.$$

On obtient ainsi l'intégrale des forces vives

$$T = U + h\,;$$

la constante h est la *constante de la force vive.*

Si un corps solide tourne autour d'un axe z avec une vitesse angulaire ω, le module de la vitesse d'un point m_ν du solide se trouvant à une distance r_ν de l'axe z est égal à $v_\nu = r_\nu \omega$; la force vive de ce corps sera égale à

$$T = \sum \frac{m_\nu v_\nu^2}{2} = \sum \frac{m_\nu r_\nu^2 \omega^2}{2} = J_z \frac{\omega^2}{2}.$$

Exemple. Un cylindre homogène de rayon r et de masse m est placé sans vitesse initiale sur un plan incliné une première fois dans une position telle que sa génératrice soit horizontale et une seconde fois de façon que

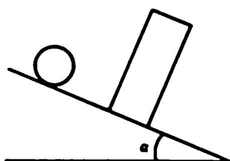


Fig. 116

sa base soit appliquée contre le plan incliné (fig. 116). Dans le premier cas, le cylindre roule sans glissement et, dans le second, il glisse sans frottement. On admettra que les liaisons sont parfaites. On notera α l'angle que fait le plan incliné avec l'horizontale. Déterminer le rapport des hauteurs de chute au cours d'un même intervalle de temps.

Dans les deux cas, les déplacements réels du cylindre font partie des déplacements virtuels, ce qui permet d'utiliser le théorème des forces vives et d'éviter d'avoir affaire aux forces de réaction. Dans le second cas, on peut utiliser le théorème du mouvement du centre de masse le long du plan incliné puisque dans ce cas, parmi les déplacements virtuels du cylindre, on trouve le mouvement de translation le long du plan incliné.

Calculons l'énergie cinétique du cylindre dans la première position. Notons ω la vitesse angulaire du roulement du cylindre, le point de contact entre le cylindre et le plan incliné est le centre instantané de rotation du cylindre ; la force vive du cylindre est égale à $J_0 \frac{\omega^2}{2}$, J_0 étant le moment d'inertie du cylindre par rapport au point de contact. Or, selon le théorème de Steiner,

$$J_0 = mr^2 + J,$$

où J est le moment d'inertie du cylindre par rapport à son centre de gravité.

Pour ce mouvement le théorème des forces vives fournit l'égalité

$$d \frac{(J + mr^2)}{2} \omega^2 = mg\,ds_1 \cdot \sin \alpha,$$

où ds_1 est le déplacement réel du centre de gravité du cylindre.

Lors du roulement sur le plan incliné $\omega = \frac{1}{r} \frac{ds_1}{dt}$, et par conséquent, on obtient après quelques transformations élémentaires

$$\frac{(J + mr^2)}{r^2} \frac{d^2 s_1}{dt^2} = mg \sin \alpha,$$

et comme $J = \frac{mr^2}{2}$,

$$\frac{3}{2} m \frac{d^2 s_1}{dt^2} = mg \sin \alpha. \tag{5.12}$$

L'application du théorème du mouvement du centre de masse au deuxième cas conduit à l'équation

$$m \frac{d^2 s_2}{dt^2} = mg \sin \alpha. \tag{5.13}$$

En identifiant (5.12) et (5.13) on obtient

$$\frac{3}{2} \frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{d^2 s_2}{dt^2}.$$

En intégrant deux fois avec les données initiales $v_1^0 = v_2^0 = 0$, $s_1^0 = s_2^0 = 0$ on obtient $3/2\, s_1 = s_2$. Comme les distances à la verticale que parcourt le centre de masse du cylindre dans les deux positions sont proportionnelles aux parcours, on obtient

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{2}{3}.$$

Problème. Le théorème des forces vives est parfois traité de façon incorrecte dans les manuels ; pour mettre en évidence l'erreur qui y est commise, on présente ci-après un calcul incorrect. Soit un point matériel absolument libre

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad Z = Z_1 + Z_2,$$

$$dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

$$dT_1 = X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz,$$

$$dT_2 = X_2\,dx + Y_2\,dy + Z_2\,dz,$$

d'où

$$d(T_1 + T_2) = dT.$$

Montrer l'erreur de raisonnement qui entraîne ce résultat absurde.

§ 4. Mouvement par rapport au centre de masse

123. Formules de König. Soit un système mécanique constitué de masses m_ν de coordonnées x_ν, y_ν, z_ν, limité dans son mouvement par des liaisons parfaites et soumis à l'action des forces X_ν, Y_ν, Z_ν. Considérons son centre de masse G dont les coordonnées sont

$$\xi = \frac{\sum m_\nu x_\nu}{M}, \quad \eta = \frac{\sum m_\nu y_\nu}{M}, \quad \zeta = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{M},$$

où $M = \sum m_\nu$ désigne la masse totale du système. Soit un système de coordonnées mobile $Gx^* y^* z^*$, dont l'origine coïncide avec le centre de masse

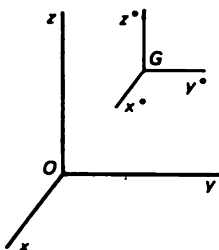


Fig. 117

du système matériel et dont les axes sont parallèles aux axes fixes $Oxyz$. Ces axes mobiles sont appelés axes de König (fig. 117). Le mouvement du système mécanique par rapport aux axes $Gx^{\bullet}y^{\bullet}z^{\bullet}$ est appelé mouvement par rapport au centre de masse. Les coordonnées du point m_ν dans ces deux référentiels sont liées par les formules

$$x_\nu = x_\nu^{\bullet} + \xi, \quad y_\nu = y_\nu^{\bullet} + \eta, \quad z_\nu = z_\nu^{\bullet} + \zeta.$$

On peut démontrer la formule de König :

$$K_z = \sum m_\nu \left(x_\nu^{\bullet} \frac{dy_\nu^{\bullet}}{dt} - y_\nu^{\bullet} \frac{dx_\nu^{\bullet}}{dt} \right) + M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right).$$

Le moment de la quantité de mouvement K_z par rapport à l'axe z est égal au moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe $z^{\bullet}$

$$K_{z^{\bullet}}^{\bullet} = \sum m_\nu \left(x_\nu^{\bullet} \frac{dy_\nu^{\bullet}}{dt} - y_\nu^{\bullet} \frac{dx_\nu^{\bullet}}{dt} \right)$$

augmenté du moment de la quantité de mouvement du centre de masse G (si la masse totale M y est concentrée) par rapport à l'axe z.

L'expression de la force vive

$$T = \sum \frac{m_\nu}{2} (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2)$$

se laisse transformer de façon analogue :

$$T = \sum \frac{m_\nu}{2} \left[\left(\frac{d(x_\nu^{\bullet} + \xi)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(y_\nu^{\bullet} + \eta)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(z_\nu^{\bullet} + \zeta)}{dt} \right)^2 \right] =$$

$$\sum \frac{m_\nu}{2} \left[\left(\frac{dx_\nu^{\bullet}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_\nu^{\bullet}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_\nu^{\bullet}}{dt} \right)^2 \right] + \sum \frac{m_\nu}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] + \sum m_\nu \left(\frac{dx_\nu^{\bullet}}{dt} \frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_\nu^{\bullet}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_\nu^{\bullet}}{dt} \frac{d\zeta}{dt} \right).$$

La dernière somme peut être mise sous la forme

$$\frac{d\xi}{dt}\left(\frac{d}{dt}\sum m_\nu x_\nu^*\right)+\frac{d\eta}{dt}\left(\frac{d}{dt}\sum m_\nu y_\nu^*\right)+\frac{d\zeta}{dt}\left(\frac{d}{dt}\sum m_\nu z_\nu^*\right).$$

Comme le centre de masse G du système coïncide toujours avec l'origine du référentiel mobile $Ox^*y^*z^*$, $\sum m_\nu x_\nu^* = 0$, $\sum m_\nu y_\nu^* = 0$, $\sum m_\nu z_\nu^* = 0$ et par suite

$$T = T_G + M\frac{v_G^2}{2}.$$

La force vive T du système est égale à la force vive du système relative à son mouvement par rapport aux axes de König $Gx^*y^*z^*$

$$T_G = \sum \frac{m_\nu}{2}\left[\left(\frac{dx_\nu^*}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_\nu^*}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_\nu^*}{dt}\right)^2\right]$$

augmentée de la force vive $M\frac{v_G^2}{2}$ du centre de masse si la masse totale M du système y est concentrée ; v_G est la vitesse du centre de masse G par rapport au référentiel fixe.

Les formules de König facilitent souvent le calcul du moment de la quantité de mouvement et de la force vive du système mécanique.

124. Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes mécaniques par rapport au centre de masse. Il existe plusieurs théorèmes généraux concernant le mouvement du système mécanique par rapport aux axes de König $Gx^*y^*z^*$ parallèles aux axes fixes et passant par le centre de masse G qui ne contiennent aucune réaction inconnue des liaisons parfaites.

Supposons que le système considéré peut tourner comme un corps solide autour de l'axe z ; cela implique que la rotation autour de l'axe z fait partie des déplacements virtuels du système mécanique et que ce dernier peut effectuer un mouvement de translation le long des axes x et y ou encore que parmi les déplacements virtuels du système mécanique figurent les translations du système assimilé à un corps solide suivant les axes x et y. Par conséquent

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z, \quad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\nu, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_\nu.$$

En remplaçant K_z par la valeur donnée par la formule de König et en explicitant M_z on obtient

$$\frac{dK_z^*}{dt}+M\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=\sum(x_\nu^* Y_\nu - y_\nu^* X_\nu)+\xi\sum Y_\nu-\eta\sum X_\nu.$$

On obtient finalement

$$\frac{dK^*_{z^*}}{dt} = M_{z^*}.$$

Par conséquent, si le système assimilé à un corps solide peut tourner autour de l'axe z et effectuer un mouvement de translation le long des axes x et y, le taux de variation du moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe z^* en mouvement rapporté aux axes de König (mouvement par rapport au centre de masse) est égal au moment des forces appliquées par rapport à l'axe z^*. Si on a encore $M_{z^*} = 0$, $K^*_{z^*} = \text{const}$.

Si les déplacements réels du système font partie des déplacements virtuels et si le système peut exécuter des mouvements de translation le long des axes x, y, z comme un corps solide, on peut appliquer au mouvement par rapport au centre de masse le théorème des forces vives

$$dT_G = \sum (X_\nu dx^*_\nu + Y_\nu dy^*_\nu + Z_\nu dz^*_\nu).$$

La démonstration se fait par analogie avec celle du théorème précédent.

Exemple. Saut acrobatique. Dans son mouvement par rapport au centre de masse, l'acrobate doit communiquer à son corps un certain moment de quantité de mouvement par rapport à un axe horizontal. On supposera que le saut s'effectue dans le vide afin de ne pas avoir à tenir compte de l'air.

Dans ces conditions, on trouve parmi les déplacements virtuels de l'acrobate les mouvements de translation de son corps assimilé à un solide dans toutes les directions ainsi que des rotations autour d'axes horizontaux. On peut donc appliquer au mouvement de l'acrobate par rapport à son centre de masse le théorème du moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe horizontal de direction constante et passant par le centre de masse. Comme les forces intérieures ne figurent pas dans le théorème du moment de la quantité de mouvement et comme le moment de la force de pesanteur par rapport au centre de masse est toujours égal à zéro, l'intégration de l'expression du théorème montre qu'il y a conservation du moment de la quantité de mouvement de l'acrobate par rapport à un axe horizontal de direction constante dans son mouvement par rapport au centre de masse :

$$J\omega = \text{const},$$

où J est le moment d'inertie de l'acrobate par rapport à l'axe défini, ω la vitesse angulaire de rotation.

Cette formule montre que la vitesse angulaire ω de l'acrobate augmente lorsque son moment d'inertie J diminue ; c'est ce qui se produit si l'acrobate se ramasse autour de son centre de masse et inversement. Ainsi, lorsque l'acrobate exécute un saut périlleux, afin de diminuer ω et retomber sur ses pieds, il doit augmenter J en s'étirant.

Exemple. Une toupie est un corps pesant délimité par une surface de révolution, dont le centre de masse C se trouve sur l'axe de rotation de la toupie à assez grande distance de la pointe A (fig. 118). Généralement, lorsque la vitesse de rotation de la toupie lancée sur une surface horizontale rugueuse est suffisamment grande, la toupie prend une position verticale. Pour pouvoir appliquer à l'étude de ce phénomène des théorèmes sur les mouvements relatifs on doit associer aux forces appliquées à la toupie les réactions de la surface d'appui horizontale et rugueuse, i.e. la réaction normale **N** et la force de frottement **T**. On considérera la toupie comme un corps solide libre ; toutes les conditions qu'implique le théorème des moments de la quantité de mouvement dans le mouvement par rapport au centre de masse sont donc satisfaites. La vitesse de l'extrémité du vecteur moment des quantités du mouvement relatif est égale au moment des forces appliquées à la toupie par rapport au centre de masse. Comme le moment de la force de pesanteur de la toupie par rapport au centre de masse est égal à zéro, il ne provoque pas directement une précession par rapport au centre de masse. La réaction normale **N** possède, par rapport au centre de masse, un moment égal à $\overline{CA} \times \mathbf{N}$; il s'ensuit que dans un mouvement de précession déterminé par la réaction **N** l'extrémité du vecteur moment de la quantité du mouvement relatif de la toupie possédera une composante horizontale de la vitesse $\overline{CA} \times \mathbf{N}$. La force de frottement **T** orientée à l'encontre de la vitesse du point de contact avec la surface d'appui possède par rapport au centre de masse C de la toupie un moment $\overline{CA} \times \mathbf{T}$; par suite, lors d'un mouvement de précession déterminé par le frottement **T**, l'extrémité du vecteur moment de la quantité du mouvement relatif de la toupie aura une composante de la vitesse égale à $\overline{CA} \times \mathbf{T}$. Lorsque le centre de masse C occupe une position élevée, cette composante possède une projection verticale positive. En conséquence, l'extrémité du vecteur moment des quantités du mouvement relatif se déplace vers le haut, ce qui fait que pour une vitesse angulaire de rotation suffisamment grande pour que le vecteur moment des quantités de mouvement soit proche de l'axe de la toupie, cette dernière se dresse à la verticale.

Exemple. Toupie chinoise. La toupie chinoise est constituée d'une enveloppe sphérique de faible poids dont on a découpé un petit segment dans le plan de la section duquel se trouve une poignée servant au lancement de la toupie (fig. 119). Le centre de masse C de la toupie chinoise se trouve sur l'axe de rotation près du point d'intersection de l'axe de la toupie avec la surface sphérique grâce à un plomb pesant fixé au sommet de la sphère. Lorsque la vitesse angulaire de rotation de la toupie est suffisamment grande et que celle-ci a été lancée sur une surface horizontale rugueuse, elle se retourne et se met sur la poignée.

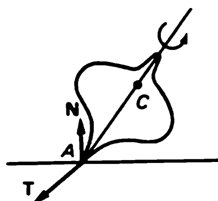


Fig. 118

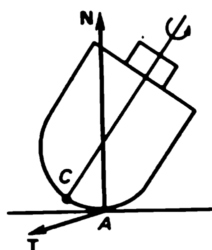


Fig. 119

Pour expliquer qualitativement les mouvements de la toupie chinoise nous nous appuyerons sur le théorème du moment de la quantité de mouvement par rapport au centre de masse. Pour cela nous adjoindrons aux forces appliquées les réactions de la surface horizontale rugueuse, i.e. sa réaction normale **N** et la force de frottement **T**, et nous considérerons que la toupie est libre. Les mouvements relatifs de la toupie se composent des mouvements de précession déterminés par les réactions **N** et **T**. La vitesse de l'extrémité du vecteur moment des quantités du mouvement relatif sera donc donnée par la formule

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \overline{CA} \times (\mathbf{N} + \mathbf{T}).$$

Lorsque la vitesse angulaire de rotation de la toupie autour de son axe est suffisamment grande, la direction du moment de la quantité de mouvement sera proche de celle de l'axe de la toupie. La vitesse $\overline{CA} \times \mathbf{N}$ est horizontale, tandis que la vitesse $\overline{CA} \times \mathbf{T}$ possède une composante verticale, de sorte que quelle que soit la rotation de la toupie, cette dernière composante entraînera la poignée vers le bas ; la toupie se retournera donc et se mettra la tête en bas sur la poignée.

Problème. Considérons le mouvement dans l'air d'un obus qui, ayant été tiré par une pièce d'artillerie, tourne autour de son centre de masse. En tenant compte de l'action exercée par l'air — la force tendant à renverser l'obus et la résultante des forces de frottement, expliquer pourquoi l'axe de l'obus en rotation tend à s'aligner sur la direction de la vitesse de déplacement (fig. 120).

Problème. Expliquer la possibilité de rouler en vélo sans tenir le guidon.

Problème. Sur une barre horizontale AB pouvant tourner librement dans des roulements à billes fixes on monte une selle et un moteur entraînant un disque massif DD' dans le sens indiqué sur la figure 121. Un homme se met en selle. Lorsque l'homme, l'axe du moteur et l'axe du disque sont contenus dans un plan vertical, le système est en état d'équilibre. Sur quelle face du disque côté D' devrait appuyer l'homme pour l'empêcher de pencher en arrière du plan de la figure ?

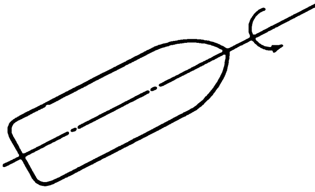


Fig. 120

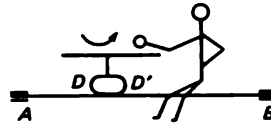


Fig. 121

125. Application du principe d'Euler-Lagrange au mouvement par rapport au centre de masse. Soit un système matériel qui parmi ses déplacements virtuels admet sa translation en bloc suivant les axes fixes $Oxyz$. Conformément à nos hypothèses, on peut lui appliquer les lois relatives aux mouvements du centre de masse le long des trois axes de coordonnées fixes

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\nu, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_\nu, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z_\nu. \tag{5.14}$$

Tout en restant dans le cadre du principe d'Euler-Lagrange, remplaçons les coordonnées des points par rapport à un repère fixe par les coordonnées par rapport aux axes de König :

$$\sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2(x^{\bullet}_\nu + \xi)}{dt^2} - X_\nu\right)\delta(x^{\bullet}_\nu + \xi) + \ldots\right] = 0,$$

soit

$$\sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2x^{\bullet}_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\delta x^{\bullet}_\nu + \ldots\right] + \sum \left[m_\nu \frac{d^2x^{\bullet}_\nu}{dt^2}\,\delta\xi + \ldots\right] +$$

$$\sum \left[m_\nu \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\delta x^{\bullet}_\nu + \ldots\right] + \sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2\xi}{dt^2} - X_\nu\right)\delta\xi + \ldots\right] = 0.$$

Or

$$\sum m_\nu \frac{d^2x^{\bullet}_\nu}{dt^2}\,\delta\xi = \delta\xi\,\frac{d^2}{dt^2}\sum m_\nu x^{\bullet}_\nu = 0,$$

$$\sum m_\nu \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\delta x^{\bullet}_\nu = \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\delta \sum m_\nu x^{\bullet}_\nu = 0.$$

On obtiendra des relations analogues pour les coordonnées $y^{\bullet}_\nu$ et $z^{\bullet}_\nu$. La dernière somme disparaît en vertu de (5.14). Il s'ensuit que le mouvement

du système par rapport aux axes de König $Ox^\bullet y^\bullet z^\bullet$ satisfait à la relation

$$\sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2 x_\nu^\bullet}{dt^2} - X_\nu \right) \delta x_\nu^\bullet + \left(m_\nu \frac{d^2 y_\nu^\bullet}{dt^2} - Y_\nu \right) \delta y_\nu^\bullet + \left(m_\nu \frac{d^2 z_\nu^\bullet}{dt^2} - Z_\nu \right) \delta z_\nu^\bullet \right] = 0,$$

à condition que le système assimilé à un corps solide exécute des mouvements de translation le long des axes $Oxyz$.

§ 5. Les équations de Lagrange

126. Considérons un système de points matériels de masses m_ν et de coordonnées x_ν, y_ν, z_ν dans un système fixe de coordonnées rectangulaires. Les points m_ν sont soumis à l'action des forces actives X_ν, Y_ν, Z_ν et des liaisons holonomes définies par les relations

$$\begin{gathered} x_\nu = x_\nu(t, q_1, \ldots, q_k), \quad y_\nu = y_\nu(t, q_1, \ldots, q_k), \\ z_\nu = z_\nu(t, q_1, \ldots, q_k) \quad (\nu = 1, \ldots, n), \end{gathered} \tag{5.15}$$

où $q_1, \ldots, q_k$ désignent des coordonnées réelles, indépendantes et holonomes (déterminantes) du système et k est le nombre de degrés de liberté du système. Les déplacements virtuels sont alors décrits par les égalités

$$\delta x_\nu = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_\nu = \sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta z_\nu = \sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \delta q_s ;$$

$\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ désignent des variations aussi petites que l'on veut des variables q_s. Ces formules décomposent l'ensemble des déplacements virtuels du système en k déplacements fondamentaux, dans lesquels ne varie que q_s (pour un s donné), toutes les autres variations des coordonnées de Lagrange sont posées égales à zéro ($s = 1, \ldots, k$). Le déplacement global est le résultat de l'ensemble des déplacements fondamentaux.

Pour établir les équations du mouvement substituons à δx_ν, δy_ν, δz_ν dans le principe d'Euler-Lagrange leurs expressions. On obtient ainsi

$$\sum_s \delta q_s \left\{ \sum_\nu m_\nu \left(x_\nu'' \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + y_\nu'' \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + z_\nu'' \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right) - \sum_\nu \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right) \right\} = 0.$$

Les quantités

$$Q_s = \sum_\nu \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

nous ont été explicitées en statique analytique ; ce sont des forces généralisées. Nous avons donc

$$x_\nu'' \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\left(x_\nu' \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\right) - x_\nu' \frac{d \dfrac{\partial x_\nu}{\partial q_s}}{dt},$$

mais comme

$$x_\nu' = \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} q_s',$$

on a

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial x_\nu'}{\partial q_s} = \frac{\partial \dfrac{\partial x_\nu}{\partial q_s}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \dfrac{\partial x_\nu}{\partial q_s}}{\partial q_j} q_j' = \frac{d \dfrac{\partial x_\nu}{\partial q_s}}{dt}.$$

Il s'ensuit que

$$x_\nu'' \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\left(x_\nu' \frac{\partial x_\nu'}{\partial q_s'}\right) - x_\nu' \frac{\partial x_\nu'}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dfrac{x_\nu'^2}{2}}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial \dfrac{x_\nu'^2}{2}}{\partial q_s}.$$

On obtient des formules analogues pour y_ν, z_ν. On peut donc écrire

$$\sum m_\nu \left(x_\nu'' \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + y_\nu'' \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + z_\nu'' \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right) =$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_s'} \sum \frac{m_\nu}{2} (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2) - \frac{\partial}{\partial q_s} \sum \frac{m_\nu}{2} (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2).$$

Le principe d'Euler-Lagrange se trouve ramené à la forme

$$\sum_s \delta q_s \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s\right] = 0, \tag{5.16}$$

où

$$T = \sum \frac{m_\nu}{2} (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2)$$

représente la force vive du système mécanique.

La relation (5.16) doit être vérifiée pour n'importe quelles valeurs de δq_s. Si les variables q_s ($s = 1, \ldots, k$) sont telles que les δq_s peuvent avoir des signes différents, on déduit de (5.16) les équations différentielles décrivant le mouvement du système mécanique considéré

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{5.17}$$

Ce sont les équations de Lagrange.

127. Les forces généralisées Q_s sont liées à l'expression du travail produit par les forces appliquées X_ν, Y_ν, Z_ν sur un déplacement virtuel du système :

$$A = \sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = \sum Q_s^2 \delta q_s.$$

Il s'ensuit que si l'on envisage le travail A_s produit par les forces appliquées sur un déplacement n'entraînant la variation δq_s que d'une seule variable q_s, toutes les autres variables ne variant pas : $\delta q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, s - 1, s + 1, \ldots, n$), on peut déduire de la relation

$$A_s = Q_s \delta q_s$$

la force généralisée Q_s.

Si les forces appliquées dérivent d'une fonction de force $U(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ qui dépend de la position du système mécanique et peut dépendre du temps, on écrira

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

ce qui entraîne

$$Q_s = \sum_\nu \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

Dans ce cas les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

se laissent écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0,$$

où L est la fonction dite de Lagrange

$$L = T + U.$$

128. Les équations de Lagrange sont bien adaptées pour les calculs puisqu'elles ne contiennent aucune réaction inconnue des liaisons imposées au système, que le nombre des équations du mouvement est réduit au minimum et que pour pouvoir écrire les équations de Lagrange il suffit de calculer la force vive T du système mécanique et les forces généralisées Q_s.

En formant les équations de Lagrange il faut veiller à ce que les coordonnées $q_1, \ldots, q_k$ soient holonomes, autrement dit, veiller à ce que les coordonnées cartésiennes des différents points du système mécanique x_ν, y_ν, z_ν puissent être explicitées dès avant l'écriture des équations du mouvement en termes de variables réelles q_s ($s = 1, 2, \ldots$) possédant leur propre signification géométrique.

Exemple. Reprenons le problème de Joukovski (cf. fig. 114). La position de la poutre est déterminée par l'angle $\angle ABO_1 = \theta$ qu'elle fait avec le plan horizontal ; θ est donc une coordonnée holonome du système étudié et de ce fait l'équation du mouvement ayant θ pour variable possédera la forme d'une équation de Lagrange.

On peut déterminer la force vive de la poutre à l'aide de la formule de König

$$T_p = \frac{P}{2g} a^2\theta'^2 + \frac{P}{2g}\frac{a^2}{3}\theta'^2 = \frac{2}{3}\frac{P}{g} a^2\theta'^2,$$

puisque le moment d'inertie central de la poutre est égal à $\frac{P}{g}\frac{a^2}{3}$.

Les coordonnées de l'animal seront alors

$$x = s\cos\theta, \quad y = (2a - s)\sin\theta,$$

d'où la force vive de l'animal assimilé à un point matériel sera donnée par

$$T_{an} = \frac{Q}{2g}[s'^2 - 4as'\theta'\sin\theta\cos\theta + [4a(a-s)\cos^2\theta + s^2]\theta'^2].$$

On déduit la force généralisée de l'expression du travail virtuel élémentaire

$$-P\delta(a\sin\theta) - Q\delta[(2a-s)\sin\theta] = Q_\theta\delta\theta\ ;$$

d'où

$$Q_\theta = -[Pa + Q(2a-s)]\cos\theta.$$

Ainsi l'équation du mouvement cherchée est de la forme

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{p}{g}a^2\frac{4}{3}\theta' + \frac{Q}{g}[4a(a-s)\cos^2\theta + s^2]\theta' - \frac{Q}{g}2as'\sin\theta\cos\theta\right\} -$$

$$\left\{-4a(a-s)\frac{Q}{g}\theta'^2\sin\theta\cos\theta - 2\frac{Q}{g}s'\theta'\cos 2\theta\right\} =$$

$$-[P_a + Q(2a-s)]\cos\theta.$$

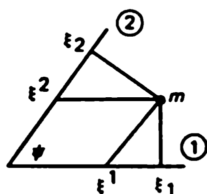


Fig. 122

Cette équation permet de trouver la solution du problème de Joukovski, i.e. de déterminer la loi du mouvement $s(t)$ de l'animal qui ne fait pas tomber la poutre : $\theta' = 0$. En portant cette valeur dans l'équation on obtient

$$-\frac{Q}{g}2as''\sin\theta\cos\theta = -[Pa + Q(2a - s)]\cos\theta.$$

En rejetant la solution $\cos\theta = 0$, on trouve (cf. p. 170)

$$s'' = -\frac{gs}{2a\sin\theta} + \frac{(P + 2Q)g}{2Q\sin\theta}.$$

129. Les équations de Lagrange conservent leur forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s,$$

quelles que soient les variables holonomes indépendantes q_s utilisées dans les équations de mouvement. Si l'on change les variables, T et Q changent, mais la forme des équations restera la même. C'est un résultat important.

Considérons dans un plan un système de coordonnées obliques fixe, avec un angle ψ entre les axes (fig. 122). La position d'un point m peut être définie à l'aide de coordonnées contravariantes (ξ^1, ξ^2), covariantes (ξ_1, ξ_2) ou mixtes (ξ_1, ξ^2), ... Il est facile d'écrire les équations du mouvement du point m dans le plan considéré en termes de ces coordonnées si les forces appliquées sont données.

130. Coordonnées cycliques. Supposons que les variables $q_{s+1}, \ldots, q_k$ $(s < k)$ jouissent des propriétés définies par

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = s + 1, \ldots, k).$$

Les coordonnées q_α sont dites cycliques. Avec ces coordonnées les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha'}\right) = 0.$$

Les intégrales de ces équations sont

$$\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = \beta_\alpha \quad (\alpha = s + 1, \ldots, k), \tag{5.18}$$

où les β_α sont des constantes d'intégration arbitraires.

Introduisons la fonction de Routh R définie par l'égalité

$$R = L - \sum q'_\alpha \beta_\alpha.$$

Dans la fonction R remplaçons les q'_α ($\alpha = s + 1, \ldots, h$) par leurs expressions tirées des intégrales premières (5.18) ; R se présentera alors comme une fonction de $t, q_1, \ldots, q_s, q'_1, \ldots, q'_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_k$. La variation de la fonction R est égale à

$$\delta R = \sum_j \frac{\partial R}{\partial q_j}\,\delta q_j + \sum_j \frac{\partial R}{\partial q'_j}\,\delta q'_j + \sum_\alpha \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}\,\delta \beta_\alpha,$$

avec $j = 1, \ldots, s$; $\alpha = s + 1, \ldots, k$.

La variation de la même fonction fondée sur sa formule de définition est égale à

$$\delta R = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q'_j}\,\delta q'_j - \sum_\alpha q'_\alpha \delta \beta_\alpha.$$

En identifiant les coefficients auprès des mêmes variations figurant dans ces deux expressions on obtient les relations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial q'_j} = \frac{\partial R}{\partial q'_j}, \quad -q'_\alpha = \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}.$$

Selon ces relations les équations de Lagrange écrites en coordonnées non cycliques q_j ($j = 1, \ldots, s$) seront de la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, s).$$

La fonction R ne dépend ni des coordonnées cycliques q_α ni de leurs vitesses.

Les dernières équations ne contiennent plus les coordonnées cycliques et réduisent les problèmes de dynamique à celui du mouvement du système mécanique en utilisant la nouvelle fonction de Lagrange R avec un moindre nombre de degrés de liberté ($s < k$). Après que les équations auront été intégrées, les valeurs des coordonnées cycliques q_α sont déterminées à l'aide des quadratures

$$q_\alpha = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}\,dt \quad (\alpha = s + 1, \ldots, k).$$

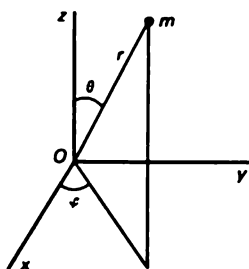


Fig. 123

Lors de l'analyse du mouvement d'un système mécanique il est tout indiqué d'utiliser des variables q_i avec lesquelles les équations de Lagrange se laissent intégrer plus facilement. Dans un grand nombre de cas, pour trouver la coordonnée cyclique il faut considérer les déplacements δq_α sur lesquels le travail des forces appliquées est égal à zéro : $\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0$ et pour lesquels la force vive du système ne varie pas : $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 0$.

La loi du mouvement du centre de gravité et l'intégrale des aires sont des cas particuliers des intégrales cycliques.

Exemple. Un point matériel m est soumis à l'action d'une force centrale dérivant de la fonction de force $U(r)$. Par suite, si les coordonnées cycliques existent, elles doivent être liées aux déplacements orthogonaux au rayon Om. Utilisons les coordonnées sphériques. Les déplacements qui ne font varier que les angles θ et φ (fig. 123) sont orthogonaux à r,

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

et la coordonnée cyclique sera l'angle φ ; l'angle θ n'est pas une coordonnée cyclique puisque

$$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2\theta\varphi'^2),$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} \neq 0.$$

L'intégrale liée à la coordonnée cyclique φ est de la forme

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = mr^2 \sin^2\theta\varphi' = \beta,$$

où β est la constante d'intégration.

La fonction de Routh est de la forme

$$R = T + U - \beta\varphi' = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2) + U - \frac{m}{2} r^2 \sin^2\theta\varphi'^2 =$$
$$\frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2) + U - \frac{\beta^2}{2mr^2\sin^2\theta}.$$

En coordonnées non cycliques les équations de mouvement représentent les équations du mouvement du point m dans un plan, écrites en coordonnées polaires, dont l'énergie cinétique est égale à

$$T^* = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2)$$

et qui se meut sous l'action de forces dérivant de la fonction de force

$$U^* = U - \frac{\beta^2}{2mr\sin^2\theta}$$

puisque

$$R = T^* + U^*.$$

131. Généralisation de l'intégrale des forces vives. Partant des équations de mouvement de Lagrange on peut déterminer l'intégrale des forces vives sous une forme plus générale que celle que nous avons établie lors de l'exposé des théorèmes généraux de la dynamique. Après dérivation des équations (5.15) relatives aux liaisons holonomes imposées au système mécanique et écrites en termes des coordonnées holonomes de Lagrange on obtient

$$x'_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} q'_s, \quad y'_\nu = \frac{\partial y_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} q'_s,$$
$$z'_\nu = \frac{\partial z_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} q'_s \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

d'où

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2\right) = T_2 + T_1 + T_0,$$

avec

$$T_2 = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\left[\left(\sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} q'_s\right)^2 + \left(\sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} q'_s\right)^2 + \left(\sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} q'_s\right)^2\right],$$

$$T_1 = \sum_\nu m_\nu \left[\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} q_s' + \frac{\partial y_\nu}{\partial t}\sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} q_s' + \frac{\partial z_\nu}{\partial t}\sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} q_s'\right],$$

$$T_0 = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\left[\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial t}\right)^2\right];$$

T_2 est une forme quadratique homogène des vitesses $q_1', \ldots, q_k'$; T_1 la forme linéaire homogène de ces mêmes vitesses ; T_0 n'en dépend pas.

L'examen des expressions de T_1, T_2, T_0 montre que si les équations des liaisons sont indépendantes du temps, i.e. si

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial y_\nu}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z_\nu}{\partial t} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$T_0 = 0$, $T_1 = 0$ et par suite $T = T_2$.

Supposons que les forces appliquées au système matériel dérivent d'une fonction de force U. Dans ces conditions $Q_s = \dfrac{\partial U}{\partial q_s}$ et les équations de mouvement de Lagrange sont de la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Multiplions chacune de ces équations par q_s' et additionnons :

$$\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) q_s' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s} q_s' = \sum \frac{\partial U}{\partial q_s} q_s'.$$

Supposons encore qu'avec les variables t, $q_1, \ldots, q_k$, $q_1', \ldots, q_k'$ les expressions de la force vive T et de la fonction U ne dépendent pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

On peut alors écrire la dernière relation sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s'\right) - \left(\sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s'' + \sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s} q_s'\right) = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} q_s',$$

ou si après la substitution $T = T_2 + T_1 + T_0$ on applique le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$\frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) - \frac{d}{dt}(T_2 + T_1 + T_0) = \frac{dU}{dt},$$

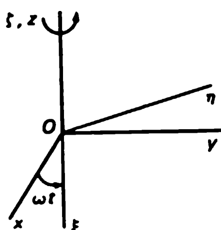


Fig. 124

soit

$$d(T_2 - T_0) = dU.$$

Après intégration on obtient l'intégrale généralisée des forces vives

$$T_2 - T_0 = U + h.$$

Si dans les conditions envisagées les liaisons ne dépendent pas explicitement du temps, on aura $T_1 = 0$, $T_0 = 0$, $T = T_2$ et la dernière intégrale coïncidera avec l'intégrale des forces vives

$$T = T_2 = U + h.$$

Exemple. Dans un système de coordonnées fixe $Oxyz$ (fig. 124) on considère des axes orthogonaux $O\xi\eta\zeta$ de même origine O. L'axe ζ coïncide avec l'axe fixe z, tandis que les axes ξ et η tournent autour de l'axe z avec une vitesse angulaire constante ω. Faisons coïncider l'origine du temps t avec l'instant où les axes x et ξ se superposent ; on a alors $\angle xO\xi = \omega t$.

Les coordonnées du point matériel de masse m seront respectivement notées x, y, z dans le premier repère et ξ, η, ζ dans le second. Ces coordonnées sont liées par les formules

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \\ y &= \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t, \\ z &= \zeta. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Ces formules témoignent que les variables ξ, η, ζ sont holonomes et déterminent la position du point matériel. Avec ces variables les équations du mouvement du point considéré m seront des équations de Lagrange. Pour calculer la force vive du point m il suffit de remarquer que les projections de la vitesse absolue du point m sur les axes mobiles, i.e. $\xi' - \eta\omega$, $\eta' + \xi\omega$, ζ', résultent de la composition des projections de la vitesse relative ξ', η', ζ' et des projections de la vitesse d'entraînement $-\eta\omega$, $\xi\omega$, 0. Par con-

séquent

$$T = \frac{m}{2} [(\xi' - \eta\omega)^2 + (\eta' + \xi\omega)^2 + \zeta'^2].$$

Quoique t figure explicitement dans les formules (5.19), T n'en dépend pas explicitement. Si les forces appliquées sur le point dérivent d'une fonction de force $U(\xi, \eta, \zeta)$, on doit avoir, conformément aux considérations ci-dessus,

$$\frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{m\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) = U + h.$$

§ 6. Détermination des réactions

132. Le principe d'Euler-Lagrange peut servir à la détermination de la réaction des liaisons. En effet, si l'on ajoute aux forces actives appliquées sur le système mécanique toutes les réactions des liaisons, l'application du principe d'Euler-Lagrange conduit aux équations de Newton pour un système de points absolument libres. Pour la pratique c'est surtout la méthode de détermination des réactions individuelles qui présente le plus d'intérêt. Cette méthode consiste à ajouter aux forces appliquées la réaction que l'on cherche à déterminer, le système pouvant alors être considéré libre de la liaison qui donne naissance à la réaction considérée. Pour le système mécanique libéré d'une liaison et possédant donc un degré de liberté supplémentaire, on détermine une coordonnée holonome q supplémentaire dont la variation détermine le déplacement qui a été libéré dans le système ; on calcule alors les nouvelles valeurs de T^*, la force généralisée Q_q^* impliquée dans le mouvement libéré ; on substitue les valeurs des variables q_s correspondant au déplacement réel dans l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial q'}\right) - \left(\frac{\partial T^*}{\partial q}\right) = Q_q^*,$$

ce qui permet de calculer la réaction cherchée puisque cette dernière est sûrement incorporée à Q_q^*. Afin de ne pas surcharger l'exposé de considérations générales tenant compte des cas pouvant survenir réellement, on expliquera la méthode à l'aide d'exemples.

133. *Exemple 1.* Dans le problème de Joukovski déjà considéré, cherchons la réaction N du mur vertical (fig. 114) en négligeant toutes les autres questions.

Conformément à ce qui a été dit, ajoutons la réaction N aux forces données. La réaction N, toutes les autres liaisons restant inchangées, empêchait le système d'effectuer toute translation virtuelle le long de l'axe x. Par

suite, l'adjonction de la réaction N aux forces actives données permet de libérer la poutre de la liaison avec le mur et d'ajouter à la coordonnée déterminante θ la variable u résultant de la libération du mouvement et égale, par exemple, à la coordonnée x de l'extrémité A.

La force vive T^* du système libéré dans son mouvement se compose de la force vive T^*_{an} de l'animal que nous confondrons, pour simplifier, avec le point matériel Λ et de la force vive T^*_p de la poutre.

Les coordonnées du milieu O de la poutre sont

$$x = u + a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta,$$

d'où

$$x' = u' - a\sin\theta\cdot\theta', \quad y' = a\cos\theta\cdot\theta'.$$

Le carré de la vitesse du point O sera donc égal à

$$v_0^2 = u'^2 - 2au'\theta'\sin\theta + a^2\theta'^2,$$

de sorte que

$$T^*_p = \frac{P}{2g}(u'^2 - 2au'\theta'\sin\theta + a^2\theta'^2) + \frac{P}{2g}\frac{a^3}{3}\theta'^2.$$

Les coordonnées de l'animal Λ sont

$$x = u + s\cos\theta, \quad y = (2a - s)\sin\theta,$$

d'où

$$x' = u' + s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta,$$
$$y' = -s'\sin\theta + (2a - s)\theta'\cos\theta\,;$$

par conséquent

$$v_{an}^2 = (u' + s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta)^2 + (-s'\sin\theta + (2a - s)\theta'\cos\theta)^2,$$

et

$$T^*_{an} = \frac{Q}{2g}\{(u' + s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta)^2 + (-s'\sin\theta + (2a - s)\theta'\cos\theta)^2\}.$$

Les forces généralisées conjuguées aux coordonnées u et θ se laissent déterminer de l'expression du travail virtuel élémentaire

$$N\delta u - P\delta(a\sin\theta) - Q\delta(2a - s)\sin\theta = N\delta u + \ldots$$

L'expression de la force Q_u est

$$Q_u = N.$$

Conformément à ce que nous avons exposé plus haut, il faut établir encore la nouvelle équation de Lagrange pour la variable u

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial u} = Q_u ;$$

or

$$\frac{\partial T^*}{\partial u'} = \frac{P}{g}(u' - a\theta' \sin\theta) + \frac{Q}{g}(u' + s' \cos\theta - s\theta' \sin\theta),$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial u} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{P}{dt}\left\{\frac{P}{g}(u' - a\theta' \sin\theta) + \frac{Q}{g}(u' + s' \cos\theta - s\theta' \sin\theta)\right\} = N.$$

Pour déterminer N il faut porter dans cette formule la valeur $u = 0$ qui correspond à la liaison imposée au système considéré. On obtient ainsi une valeur N' qui est valable pour le cas où la poutre tombe

$$N' = \frac{d}{dt}\left\{\frac{P}{g}(-a\theta' \sin\theta) + \frac{Q}{g}(s' \cos\theta - s\theta' \sin\theta)\right\}.$$

Pour le cas envisagé par Joukovski il faut introduire encore dans cette formule les valeurs

$$u' = 0, \quad \theta' = 0$$

qui correspondent au cas où la poutre est immobile ; on trouve alors

$$N = \frac{Q}{g} s'' \cos\theta.$$

En procédant de façon analogue on peut déterminer la réaction de l'extrémité B.

Il est intéressant de déterminer la réaction **R** de la liaison de l'animal avec la poutre. Négligeons la liaison entre l'animal et la poutre (fig. 125). La réaction **R** de cette liaison s'exerçant sur l'animal Λ et la réaction **R**$'$ (**R**$'$ = −**R**) s'exerçant en un point C de la poutre doivent être adjointes aux forces actives — le poids de l'animal et celui de la poutre. La coordonnée s sera holonome si δs exprime le mouvement libéré de l'animal Λ seulement. Nous n'aurons pas à calculer de nouveau la force vive T^* car il suffit de poser $u' = 0$ dans l'expression que nous avons déjà trouvée. Dans ce

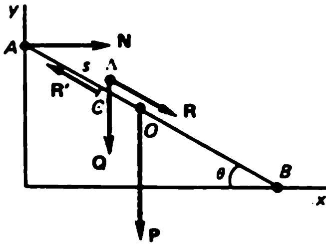


Fig. 125

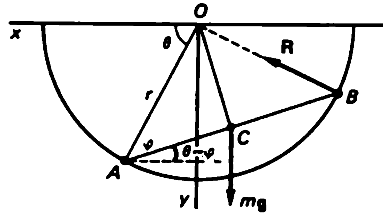


Fig. 126

cas de mouvement libéré les forces généralisées se laissent déterminer à l'aide de l'expression du travail produit par les forces actives et par les réactions, que nous avons ajoutées lorsqu'on a éliminé la liaison, sur un déplacement virtuel élémentaire du mouvement libéré :

$$R\delta s - P\delta(a\sin\theta) - Q\delta(2a - s)\sin\theta = Q_s\delta s + \ldots$$

On en tire

$$Q_s = R + Q\sin\theta.$$

L'équation de Lagrange permettant de calculer R s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial s'}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial s} = Q_s,$$

où (avec $u' = 0$)

$$\frac{\partial T^*}{\partial s'} = \frac{Q}{g}\{(s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta)\cos\theta - \\ (-s'\sin\theta + (2a - s)\theta'\cos\theta)\sin\theta\},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial s} = \frac{Q}{g}\{-(s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta)\theta'\sin\theta - \\ (-s'\sin\theta + (2a - s)\theta'\cos\theta)\theta'\cos\theta\}.$$

Dans le cas où la poutre tombe

$$\frac{d}{dt}\frac{Q}{g}\{(s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta)\cos\theta - (-s'\sin\theta + \\ (2a - s)\theta'\cos\theta)\sin\theta\} + \frac{Q}{g}\{(s'\cos\theta - s\theta'\sin\theta)\theta'\sin\theta + \\ (-s'\sin\theta + (2a - s)\theta'\cos\theta)\theta'\cos\theta\} = R + Q\sin\theta.$$

Dans le cas envisagé par Joukovski où $\theta' = 0$ on a

$$\frac{Q}{g}(s'' \cos^2\theta + s'' \sin^2\theta) = R + Q\sin\theta,$$

soit

$$R = \frac{Q}{g}s'' - Q\sin\theta.$$

Exemple 2. Une tige homogène pesante AB d'une longueur $2l$ et de masse m glisse dans un plan vertical, ses deux bouts s'appuyant sur le fond d'une coupe sphérique lisse de rayon r (fig. 126). Calculer la réaction **R** à l'extrémité B.

Adjoignons **R** aux forces actives afin de libérer le point B de sa liaison. Adoptons en qualité de nouvelle variable, utilisée pour caractériser le mouvement libéré, l'angle $\angle OAB = \varphi$; lorsque les liaisons sont appliquées, cet angle possède une valeur constante bien déterminée $\varphi = \alpha$. Notons C le milieu de la tige AB. Déterminons la force vive T^* de la tige effectuant un mouvement libéré à l'aide du théorème de König. Pour cela il faut calculer la vitesse du centre de gravité C de la tige AB.

Dans le repère Oxy, où x est l'axe horizontal orienté vers la gauche du centre O de la coupe et l'axe y est orienté suivant la verticale descendante, les coordonnées du point C sont

$$x = r\cos\theta - l\cos(\theta - \varphi), \qquad y = r\sin\theta - l\sin(\theta - \varphi).$$

En dérivant on trouve d'abord x' et y' et ensuite le carré de la vitesse v du point C :

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = r^2\theta'^2 + l^2(\theta' - \varphi')^2 - 2rl\theta'(\theta' - \varphi')[\sin(\theta - \varphi)\sin\theta + \cos(\theta - \varphi)\cos\theta].$$

En notant J_C le moment d'inertie de la tige AB par rapport à son centre de gravité C, l'application de la formule de König fournit l'expression de la force vive T^* du système correspondant à son mouvement libéré :

$$T^* = \frac{mv^2}{2} + J_C\frac{(\theta' - \varphi')^2}{2}.$$

La force généralisée Q_φ s'obtient à partir de l'expression du travail que les forces actives et la réaction R effectuent au cours d'un déplacement ne faisant varier que φ de la valeur $\delta\varphi$. Puisque pour $\delta\varphi > 0$ la tige tourne autour du point A dans le sens horaire, Q_φ sera égal au moment des forces actives et de la réaction **R** par rapport au point A, changé de signe :

$$Q_\varphi = mgl\cos(\theta - \varphi) - R2l\sin\varphi.$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

s'écrira, compte tenu de la valeur $J_C = \frac{ml^2}{3}$ et à condition d'y substituer la valeur de φ correspondant au mouvement réel avec toutes les liaisons $\varphi = \alpha$, $\varphi' = 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2\theta'}{3}\right) + mrl\theta'^2 \sin\alpha = -mgl\cos(\theta - \alpha) + 2Rl\sin\alpha.$$

On en tire directement la réaction cherchée R.

Il est instructif de traiter ce même problème d'une manière différente. Lorsqu'on adjoint la réaction **R** aux forces actives, afin de libérer l'extrémité B de la tige, on peut adopter pour déplacement libéré la rotation de la tige autour de son extrémité A. Cette rotation ne détruit pas la liaison du point A et constitue une rotation autour d'un point fixe, la variable θ ayant alors une valeur donnée. Pour déterminer la réaction R on peut porter les valeurs des déplacements virtuels relatifs au mouvement libéré directement dans l'expression du principe d'Euler-Lagrange où la réaction est adjointe aux forces actives ; l'accélération concernera ici le mouvement réel.

Pour pouvoir écrire les formules définissons un système de coordonnées rectangulaires Ax^*y^* d'origine A. Le principe d'Euler-Lagrange, après la substitution dont il a été question plus haut, s'exprime par

$$\sum m_\nu\left[x_\nu^*\frac{d^2y_\nu}{dt^2} - y_\nu^*\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right] = \sum (x_\nu^* Y_\nu - y_\nu^* X_\nu) + x_B^* R_y - y_B^* R_x.$$

Dans le premier membre de la formule figure la somme des produits des masses par le moment des accélérations par rapport au point A, et dans le second membre on trouve le moment des forces actives et de la réaction **R** par rapport à A. On déduit ces expressions plus facilement de la figure 127. Isolons sur la tige au point P, se trouvant à la distance s du point

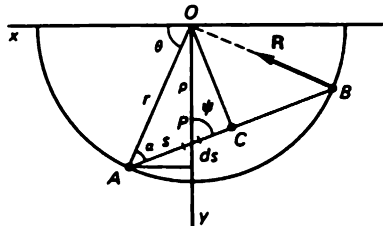


Fig. 127

A, un élément ds. L'élément ds renferme une masse $\frac{m}{2l}\,ds$. Dans son mouvement circulaire réel autour du centre O le point P acquiert une accélération centripète $\varrho\theta'^2$, dirigée suivant PO, et une accélération tangentielle $\varrho\theta''$ dirigée suivant une direction orthogonale à OP. On a noté ϱ la distance OP ($\varrho = |OP|$). Le moment de l'accélération centripète du point P par rapport à l'extrémité A est égal à

$$\varrho\theta'^2 s\sin\psi = \theta'^2 sr\sin\alpha\ ;$$

le moment de l'accélération tangentielle du point P par rapport à l'extrémité A de la tige est égal à

$$-\varrho\theta'' s\cos\psi = -\theta'' s(l-s).$$

La formule écrite plus haut s'écrira maintenant sous la forme

$$\frac{m}{2l}\int[\theta'^2 sr\sin\alpha + \theta'' s(s-l)]\,ds = -mgl\cos(\theta-\alpha) + 2Rl\sin\alpha,$$

ou

$$\frac{ml^2}{3}\theta'' + \theta'^2 mrl\sin\alpha = -mgl\cos(\theta-\alpha) + 2Rl\sin\alpha.$$

Le problème posé peut donc être résolu si, après adjonction de la réaction R aux forces actives, le mouvement libéré sera identifié à une rotation autour de n'importe quel point de la droite OA, excepté le point O.

CHAPITRE VI

DYNAMIQUE DU SOLIDE

§ 1. Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe

134. Soit un corps solide dont deux points O et O' sont fixes. Un tel corps ne pourra que tourner autour d'un axe passant par ces deux points fixes (fig. 128). Nous pouvons identifier l'axe passant par O et O' avec l'axe z si nous adoptons pour axes x et y deux droites orthogonales à l'axe z et passant pàr O.

Supposons que les points du corps de masse m_ν et de coordonnées x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) sont soumis à l'action de forces dont les projections sont X_ν, Y_ν, Z_ν. Notons ω la vitesse angulaire de rotation de notre corps solide autour de l'axe z. D'après le théorème d'Euler, les projections de la vitesse du point (x_ν, y_ν, z_ν) du solide sur les axes fixes sont

$$\frac{dx_\nu}{dt} = -\omega y_\nu, \quad \frac{dy_\nu}{dt} = \omega x_\nu, \quad \frac{dz_\nu}{dt} = 0.$$

Le moment de la quantité de mouvement (moment cinétique) du solide par rapport à l'axe z et sa force vive sont donnés par les formules déjà établies

$$K_z = J\omega, \quad T = J\frac{\omega^2}{2},$$

où J désigne le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe z.

Le corps solide tournant autour de l'axe z possède un seul degré de liberté et son mouvement sera décrit par une seule équation. Les mouvements virtuels des corps solides sont dans ce cas des rotations autour de l'axe fixe z et on pourra donc appliquer le théorème du moment de la quantité de mouvement autour de l'axe z

$$J\frac{d\omega}{dt} = N,$$

où N désigne le moment résultant par rapport à l'axe z des forces appliquées sur le corps.

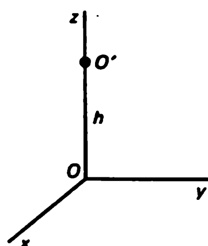


Fig. 128

135. Une application pratique digne d'intérêt est la détermination des réactions d'appui. Posons que les projections des réactions des points fixes O et O' sur les axes de coordonnées sont respectivement notées X, Y, Z et X', Y', Z'. Adjoignons ces réactions aux forces appliquées. On peut alors considérer que le corps solide est libre de ses attaches aux points O et O'. Le corps étant absolument libre, on peut appliquer les théorèmes généraux sur le mouvement du centre de masse et sur le moment de la quantité de mouvement et en déduire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} &= \sum X_\nu + X + X', \\ \sum m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} &= \sum Y_\nu + Y + Y', \\ \sum m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} &= \sum Z_\nu + Z + Z', \\ \frac{d}{dt}\sum m_\nu \left(y_\nu \frac{dz_\nu}{dt} - z_\nu \frac{dy_\nu}{dt} \right) &= L - hY', \\ \frac{d}{dt}\sum m_\nu \left(z_\nu \frac{dx_\nu}{dt} - x_\nu \frac{dz_\nu}{dt} \right) &= M + hX'; \end{aligned} \qquad (6.1)$$

h désigne la distance entre les points O et O' ; L, M, N sont les projections sur les axes de coordonnées du moment des forces appliquées par rapport à l'origine O.

Disposant des cinq relations ci-dessus, on ne peut déterminer les six réactions d'appui X, Y, Z, X', Y', Z'. Le problème reste donc indéterminé. Cette indétermination peut être expliquée, comme c'était le cas en statique, par le fait qu'au mouvement de translation du solide le long de l'axe z s'opposent simultanément deux réactions Z et Z' ; c'est pour cela que l'on ne peut les déterminer séparément à l'aide des formules ci-dessus.

136. Axes de rotation permanents et spontanés (naturels). On peut transformer les relations (6.1) à l'aide des égalités

$$\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = -\omega^2 x_\nu - \frac{d\omega}{dt} y_\nu, \quad \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = -\omega^2 y_\nu + \frac{d\omega}{dt} x_\nu, \quad \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\omega^2 \sum m_\nu x_\nu - \frac{d\omega}{dt} \sum m_\nu y_\nu &= \sum X_\nu + X + X', \\
-\omega^2 \sum m_\nu y_\nu + \frac{d\omega}{dt} \sum m_\nu x_\nu &= \sum Y_\nu + Y + Y', \\
0 &= \sum Z_\nu + Z + Z', \\
\omega^2 \sum m_\nu z_\nu y_\nu - \frac{d\omega}{dt} \sum m_\nu z_\nu x_\nu &= L - hY', \\
-\omega^2 \sum m_\nu z_\nu x_\nu - \frac{d\omega}{dt} \sum m_\nu z_\nu y_\nu &= M + hX'.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Si z est l'axe principal de l'ellipsoïde d'inertie central

$$\sum m_\nu x_\nu = 0, \quad \sum m_\nu y_\nu = 0, \quad \sum m_\nu z_\nu x_\nu = 0, \quad \sum m_\nu z_\nu y_\nu = 0,$$

les réactions d'appui se laissent déterminer comme en statique puisqu'alors tous les termes figurant dans les premiers membres disparaissent. Si ce cas-là ne se présente pas, les réactions dépendront de la vitesse angulaire ω de rotation du corps solide et de la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$. Dans le cas où ω et $\frac{d\omega}{dt}$ sont numériquement grands, on obtient des réactions d'appui numériquement grandes. Pour l'éviter on fait coïncider l'axe de rotation des centrifugeuses avec l'axe principal de l'ellipsoïde d'inertie central.

Posons $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Le corps tournera alors autour de l'axe z avec une vitesse angulaire ω constante. Cherchons les conditions qui assurent l'absence de réactions au point O' ($X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$). Les dernières relations (6.2) conduisent alors au résultat suivant :

$$\sum m_\nu z_\nu y_\nu = 0, \quad \sum m_\nu z_\nu x_\nu = 0,$$

ce qui signifie que l'axe z doit être l'axe principal de l'ellipsoïde d'inertie construit pour le corps solide par rapport au point O. Ces axes sont dits axes de rotation *permanents* des corps solides.

Supposons que le corps solide n'est soumis à aucune force extérieure donnée $X_\nu = 0$, $Y_\nu = 0$, $Z_\nu = 0$. Dans ces conditions, le corps tournera avec une vitesse constante autour de l'axe z sans subir des réactions d'appui aux points fixes O et O' si

$$\sum m_\nu x_\nu = 0, \quad \sum m_\nu y_\nu = 0, \quad \sum m_\nu z_\nu x_\nu = 0, \quad \sum m_\nu z_\nu y_\nu = 0.$$

L'axe z est alors l'axe principal de l'ellipsoïde d'inertie central. Ces axes sont appelés axes de rotation *naturels* (ou axes de rotation spontanés) des corps solides.

137. Le *pendule composé* est constitué par un corps solide pesant, mobile autour d'un axe horizontal fixe (fig. 129). Notons z l'axe de suspension et x l'axe vertical orienté vers le bas. Fixons l'origine O des coordonnées de façon que le centre de gravité G du pendule soit contenu dans le plan xy. Notons θ l'angle d'écart de la droite OG par rapport à la verticale x.

Comme le pendule peut tourner autour de son axe fixe, on peut lui appliquer le théorème du moment des quantités de mouvement par rapport à l'axe z

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl \sin \theta,$$

où M est la masse du pendule, K le rayon de giration du pendule par rapport à l'axe z ($J_z = Mk^2$), $l = OG$.

Identifions l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{lg}{k^2} \sin \theta$$

avec l'équation de mouvement du pendule simple de longueur l'

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l'} \sin \theta.$$

On voit que le pendule simple de longueur $l' = k^2/l$ oscillera comme le pendule composé ; en conséquence, l' porte le nom de *longueur réduite du pendule composé*.

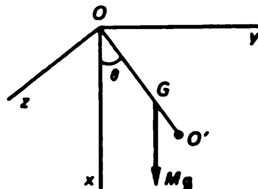


Fig. 129

Portons sur la droite OG, en partant du point de suspension du pendule composé, un segment OO' égal à la longueur réduite du pendule composé : $OO' = l'$; le point O' est appelé *centre d'oscillation.*

138. Théorème de Huygens. Si on suspend un pendule composé en son centre d'oscillation, il oscillera avec la même période.

Soit ϱ le rayon de giration central par rapport à un axe parallèle à z et passant par le centre de gravité G. Selon le théorème de Steiner

$$Mk^2 = M\varrho^2 + Ml^2,$$

d'où $l' = \dfrac{\varrho^2}{l} + l$ ou $(l' - l)l = \varrho^2$, soit

$$OG \cdot O'G = \varrho^2.$$

Cette formule est symétrique par rapport au centre d'oscillation O' et au point de suspension O ; cela constitue une preuve de ce qu'un pendule suspendu en son centre d'oscillation oscillera avec la même période. On peut calculer directement sa longueur réduite l^* :

$$l^* = \frac{\varrho^2}{(l' - l)} + (l' - l) = l'.$$

Il s'ensuit que le lieu géométrique des points de suspension d'un pendule composé pour lesquels sa période d'oscillation reste la même sont deux cercles centrés en G de rayons OG et $O'G$ (fig. 130). Lorsque $l > \varrho$, on a un *pendule*, et lorsque $l < \varrho$, on a un *fléau.*

L'examen de la formule

$$\frac{dl'}{dl} = 1 - \frac{\varrho^2}{l^2}$$

montre que si on diminue la longueur l du pendule ($l > \varrho$), sa période d'oscillation diminue $\left(\dfrac{dl'}{dl} > 0\right)$, et lorsqu'on diminue la longueur l du fléau ($l < \varrho$), sa période d'oscillation augmente ($dl'/dl < 0$).

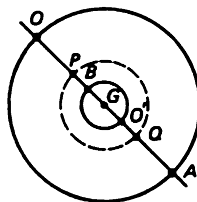


Fig. 130

Exemple. Pendule réversible de Kater. Le pendule de Kater se compose d'une réglette sur laquelle sont fixés deux prismes dont les arêtes constituent, en cas de besoin, deux points de suspension (O et O'). Près de l'une des extrémités de la réglette on dispose un disque massif dans une position telle que le centre de masse ne coïncide pas avec le milieu de la distance entre les arêtes des prismes. Un dispositif est prévu pour modifier simplement la position du centre de masse entre les points O et O'. On fait osciller le pendule alternativement autour de chacune des arêtes des deux prismes (points O et O') et on modifie la position du centre de masse jusqu'à ce que la période des oscillations s'égalise. On doit veiller à ce que les distances entre les points de suspension et le centre de masse ne soient pas égales (afin que $OG \neq O'G$). Comme les deux points de suspension sont disposés de part et d'autre de centre de gravité, la longueur réduite du pendule est égale à $O'O = l'$.

Menons un cercle de rayon ϱ vérifiant la relation

$$OG \cdot O'G = \varrho^2.$$

L'intersection de ce cercle avec la droite reliant les points de suspension et le centre d'oscillation détermine les points P et Q.

Déterminons le point O'. Pour cela construisons le cercle de rayon ϱ ayant G pour centre. Son intersection avec la droite reliant les points O et G définit les points P et Q. Menons du point de suspension O les tangentes à ce cercle et relions les points de tangence par une droite dont l'intersection avec la droite OG définit le point B. Prenant G pour centre, traçons un cercle de rayon BG qui définira le point O'.

Cette construction montre que

$$OG \cdot BG = \varrho^2, \quad BG = GO',$$

i.e.

$$OG \cdot O'G = \varrho^2.$$

§ 2. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

139. Soit un corps solide dont un point O est fixe. Notons x, y, z les coordonnées cartésiennes liées au corps solide (fig. 131). Notons p, q, r les projections du vecteur vitesse angulaire instantanée ω sur les axes x, y, z; les coordonnées d'un point du corps seront notées x, y, z et sa masse m. Notons $\mathbf{v}$ le vecteur vitesse absolue du point m. D'après le théorème d'Euler, ses projections sur les axes x, y, z sont

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{Vmatrix},$$

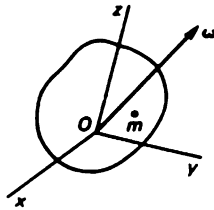


Fig. 131

ou bien

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

La force vive du corps est égale à

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq),$$

ou A, B, C sont les moments d'inertie du corps par rapport aux axes x, y, z ; D, E, F désignent les produits d'inertie ou les moments d'inertie centrifuges par rapport aux mêmes axes.

140. Les projections σ_x, σ_y, σ_z sur les axes x, y, z du moment de la quantité de mouvement σ d'un corps solide sont égales à

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \sum \left\| \begin{matrix} x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{matrix} \right\|,$$

d'où l'on tire

$$\sigma_x = Ap - Fq - Er = \frac{\partial T}{\partial p},$$

$$\sigma_y = -\,Fp + Bq - Dr = \frac{\partial T}{\partial q},$$

$$\sigma_z = -\,Ep - Dq + Cr = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Ces dernières relations établissent une relation géométrique intéressante entre la direction du vecteur vitesse angulaire instantanée ω et le vecteur moment de la quantité de mouvement σ. Soit $P(x, y, z)$ le point d'intersection du vecteur ω avec l'ellipsoïde d'inertie $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = x$ (fig. 132). L'équation de l'ellipsoïde d'inertie s'écrit

$$f = Ax^2 + By^2 + Cr^2 - 2\,Dyz - 2\,Ezx - 2\,Fxy = 1,$$

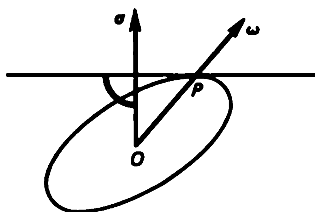


Fig. 132

de sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(Ax - Ez - Fy) = 2x(Ap - Er - Fq) = 2x\,\frac{\partial T}{\partial p} = 2x\sigma_x;$$

alors

$$\frac{\sigma_x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\sigma_y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\sigma_z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Le vecteur σ est parallèle à grad f au point P.

141. Les équations de mouvement. Un corps solide dont un point est fixe peut effectuer, en qualité de mouvements virtuels, des rotations autour d'axes passant par le point fixe et, par suite, des rotations autour d'axes orthogonaux fixes se coupant en O. On en conclut que la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur moment de la quantité de mouvement σ par rapport au point fixe O est égale au moment des forces actives appliquées. Ce résultat peut être formulé en termes des axes de coordonnées mobiles.

La vitesse absolue de l'extrémité du vecteur moment de la quantité de mouvement σ (σ_x, σ_y, σ_z) est égale à la somme de la vitesse relative ($d\sigma_x/dt$, $d\sigma_y/dt$, $d\sigma_z/dt$) et de la vitesse d'entraînement ($q\sigma_z - r\sigma_y$, $r\sigma_x - p\sigma_z$, $p\sigma_y - q\sigma_x$). On en tire

$$\frac{\sigma_x}{dt} + q\sigma_z - r\sigma_y = L, \quad \frac{d\sigma_y}{dt} + r\sigma_x - p\sigma_z = M, \quad \frac{d\sigma_z}{dt} + p\sigma_y - q\sigma_x = N,$$

où L, M, N désignent les projections du moment résultant des forces actives appliquées par rapport au point O.

142. Les équations décrivant le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe se présentent sous une forme particulièrement simple lorsque les axes mobiles x, y, z sont confondus avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie construit par rapport au point fixe O. Dans ce cas

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

d'où

$$\sigma_x = Ap,\ \sigma_y = Bq,\ \sigma_z = Cr.$$

Après substitutions dans les équations de mouvement on obtient

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + L,\quad B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + M,$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + N.$$

Ces équations de mouvement du corps solide avec un point fixe ont été établies par Euler et sont appelées *équations d'Euler*.

143. Equations de mouvement rapportées à un repère mobile non lié au corps. Considérons un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z ayant pour origine le point fixe O du corps solide (fig. 133). Posons que ce système de coordonnées soit en mouvement et que le vecteur $\mathbf{\Omega}$, dont les projections sur les axes du repère mobile sont P, Q, R, représente le vecteur vitesse angulaire absolue instantanée de rotation du repère mobile. Soit ω le vecteur vitesse angulaire absolue de rotation du corps solide dont les projections sur les axes x, y, z du repère mobile sont p, q, r.

Conformément au théorème d'Euler, la vitesse $\mathbf{v}$ du point $M(x, y, z)$ du corps solide est donnée par la formule $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$; les projections de cette vitesse sont données par la matrice

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{Vmatrix},$$

d'où

$$v_x = qz - ry,\ v_y = rx - pz,\ v_z = py - qx.$$

On en tire

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fqp,$$

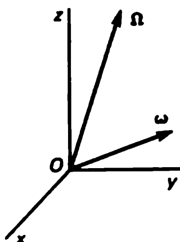


Fig. 133

où A, B, C désignent les moments d'inertie du corps solide par rapport aux axes x, y, z et D, E, F sont les produits d'inertie correspondants. Comme le corps solide est en mouvement par rapport aux axes x, y, z, les quantités A, B, C, D, E, F sont généralement variables.

Les projections du vecteur σ des quantités du mouvement (absolu) du corps sur les axes de coordonnées vérifient les relations

$$\sigma_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \sigma_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \sigma_z = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + Q\sigma_z - R\sigma_y = L, \quad \frac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z = M,$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x = N,$$

où L, M, N sont les moments résultants des forces actives agissantes par rapport aux axes x, y, z.

§ 3. Cas du mouvement d'Euler

144. Euler a envisagé le cas du mouvement d'un corps solide dont un point est fixe lorsque les forces qui agissent sur ce corps se réduisent à une résultante unique passant par le point fixe. Dans ces conditions, les moments résultants des forces actives agissantes sont nuls : $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ et les équations du mouvement du corps solide rapporté aux axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps solide par rapport au point fixe O s'écrivent sous la forme

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \quad B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp, \quad C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq.$$

Comme ces équations de mouvement ne contiennent, outre p, q, r, aucun angle d'Euler, leur intégration s'effectue en deux parties : on intègre d'abord les équations de mouvement et on trouve p, q, r en fonction de t, ensuite on en déduit les angles d'Euler ψ, θ, φ en fonction de t (voir p. 214). Les équations de mouvement possèdent deux intégrales premières. Multiplions la première équation par p, la deuxième par q et la troisième par r et additionnons ; on obtient la relation

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

qui après intégration fournit l'égalité

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

où h est la constante d'intégration.

En multipliant les équations de mouvement respectivement par Ap, Bq, Cr et en additionnant les résultats, on obtient

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0.$$

On en tire

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2,$$

où l^2 est la constante d'intégration.

Ces intégrales se laissent interpréter à l'aide des théorèmes généraux. La première intégrale est l'intégrale des forces vives, la seconde est l'intégrale du moment de la quantité de mouvement. En effet, les déplacements réels d'un corps solide dont un point est fixe font partie de ses déplacements virtuels. Le travail produit par les forces actives pouvant être réduites à une résultante unique passant par le point fixe sur un déplacement réel est égal à zéro ; il s'ensuit que l'intégrale des forces vives $2T = h$. D'autre part, le corps solide peut tourner autour de tout axe fixe passant par le point fixe O. Le moment résultant des forces agissantes par rapport au point fixe étant nul, le théorème général du moment de la quantité de mouvement implique que le moment de la quantité de mouvement σ du corps solide est un vecteur fixe dans un espace fixe. Il s'ensuit que sa longueur $\sigma^2 = l^2$ est constante. L'application du théorème général a permis d'obtenir plus que la deuxième intégrale première, notamment que σ possède non seulement une longueur constante mais que sa direction est constante dans un espace fixe.

145. Poinsot a trouvé une interprétation géométrique élégante du mouvement d'un solide dont un point est fixe dans le cas d'Euler.

Considérons l'ellipsoïde d'inertie du corps solide par rapport au point fixe O et soient x, y, z les principaux axes de cet ellipsoïde (fig. 134). En

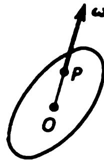


Fig. 134

notant A, B, C les moments d'inertie du corps par rapport aux axes x, y, z, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie s'écrit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Posons pour fixer les idées que $A \geqslant B \geqslant C$.

A l'instant t considéré la vitesse angulaire instantanée $\omega(p, q, r)$ de rotation du corps coupe la surface de l'ellipsoïde d'inertie en un point P que Poinsot appela *pôle*. Notons x, y, z les coordonnées du pôle ; on aura alors

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{\Delta} \quad (\Delta = OP).$$

Poinsot énonça les théorèmes suivants.

1° *Le rapport ω/Δ est une quantité constante.*

En effet, si dans l'intégrale des forces vives on substitue à p, q, r leurs valeurs données par les rapports ci-dessus, on obtiendra

$$\frac{\omega^2}{\Delta^2} = h,$$

C.Q.F.D.

2° *Le plan π tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle P est orthogonal au moment de la quantité de mouvement σ.*

L'équation du plan π tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point P de coordonnées x, y, z s'écrit

$$AxX + ByY + CzZ = 1,$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes ; on peut écrire ainsi

$$\frac{\Delta}{\omega}(ApX + BqY + CrZ) = 1 ;$$

or, c'est l'équation du plan orthogonal au vecteur moment de la quantité de mouvement $\sigma_x = Ap$, $\sigma_y = Bq$, $\sigma_z = Cr$.

3° *La distance entre le plan π et le point fixe O est constante et égale à $\sqrt{h}/l$.*

En effet, cette distance est égale au quotient du terme libre par la racine carrée de la somme des carrés des coefficients :

$$\delta = \frac{\omega/\Delta}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{\sqrt{h}}{l}.$$

Il s'ensuit que le plan π tangent en P est un plan fixe situé dans un espace fixe puisque ce plan est orthogonal à la direction invariable de σ et se trouve

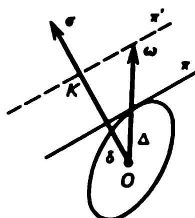


Fig. 135

à une distance constante δ du point fixe O. L'ellipsoïde d'inertie du corps par rapport au point O roule sans glissement sur le plan fixe π.

La projection OK du vecteur vitesse angulaire instantanée ω sur la direction du vecteur moment de la quantité de mouvement σ est une quantité constante. En effet (fig. 135)

$$\frac{OK}{\delta} = \frac{\omega}{\Delta} = \sqrt{h},$$

d'où

$$OK = \delta\sqrt{h} = \frac{h}{l},$$

ce qui signifie que l'extrémité du vecteur vitesse angulaire instantanée de rotation du corps solide est contenue dans un plan π' parallèle au plan π et se trouvant à une distance h/l du point fixe.

Corollaires. 1. Les axes principaux d'inertie sont des axes de rotation permanents du corps solide.

2. Si l'ellipsoïde d'inertie est un ellipsoïde de révolution, le corps exécute une précession régulière : les herpolhodies *) sont des cercles et les axoïdes sont des cônes circulaires.

146. Stabilité des rotations constantes des corps. Soit

$$D = \frac{l^2}{h} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Les intégrales premières permettent d'écrire les relations

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D,$$

d'où

$$A(A - D)x^2 + B(B - D)y^2 + C(C - D)z^2 = 0.$$

*) Une herpolhodie est la courbe que décrit le pôle sur le plan fixe π.

C'est l'équation d'une axoïde mobile. Pour que ce cône soit réel il faut que

$$A \geqslant D \geqslant C\,;$$

or c'est la condition évidente de ce que la distance δ séparant le plan fixe π du point fixe ne doit pas être inférieure au plus petit demi-axe de l'ellipsoïde d'inertie et ne doit pas être supérieure à son plus grand demi-axe.

Si $D = A$, le cône dégénère en l'axe x ($y = 0$, $z = 0$) ; si $D = C$, le cône dégénère en l'axe z ($x = 0, y = 0$) et si $D = B$, le cône dégénère en un couple de plans

$$[\sqrt{A(A-D)}x + \sqrt{C(D-C)}z][\sqrt{A(A-D)}x - \sqrt{C(D-C)}z] = 0.$$

Les petits écarts de D par rapport à ces valeurs critiques donnent une idée de la stabilité des rotations constantes autour du plus grand et du plus petit demi-axe de l'ellipsoïde d'inertie ainsi que de l'instabilité des rotations constantes autour du demi-axe médian (fig. 136).

147. Considérons le problème du calcul de la réaction d'un point fixe. Lorsque nous avions besoin d'intégrales premières ou de l'intégration, nous n'avons pas utilisé les vecteurs, mais pour établir la réaction d'un point fixe la mise en œuvre des vecteurs permet d'alléger les écritures.

Faisons coïncider les principaux axes de l'ellipsoïde d'inertie du corps construit par rapport au point fixe O avec les axes de coordonnées $Oxyz$. Nous utiliserons les notations suivantes : $\mathbf{K}$ — quantité de mouvement du corps, ω — vecteur vitesse angulaire instantanée de rotation du corps, $\mathbf{F}_\nu$ — forces actives agissant sur le corps solide, $\mathbf{R}$ — réaction du point fixe. Les rayons-vecteurs des différents points du corps seront notés $\mathbf{r}$, tandis que m désignera les masses, ξ désignera le rayon-vecteur du centre de gravité du corps. La vitesse d'un point du corps est égale à $\omega \times \mathbf{r}$ et le vecteur

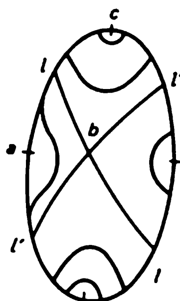


Fig. 136

quantité de mouvement **K** est donc défini par les relations

$$\mathbf{K} = \sum m(\omega \times \mathbf{r}) = \omega \times \sum m\mathbf{r} = \omega \times M\xi = M(\omega \times \xi),$$

où $M = \sum m$ est la masse totale du corps.

148. Théorème sur la quantité de mouvement d'un corps. La vitesse absolue de l'extrémité du vecteur quantité de mouvement **K** est égale à la somme de toutes les forces actives $\sum \mathbf{F}$ et de la réaction **R**. D'autre part, la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur quantité de mouvement est égale à la somme de la vitesse relative $\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_{xyz}$ par rapport au repère $Oxyz$ et de la vitesse d'entraînement $\omega \times \mathbf{K}$ vu que le repère $Oxyz$ lié au corps est animé d'une vitesse instantanée de rotation ω qui est égale à celle du corps considéré. Il en découle le théorème sur la quantité de mouvement selon lequel

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_{xyz} + \omega \times \mathbf{K} = \sum \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Si on substitue dans cette formule la valeur $\mathbf{K} = M(\omega \times \xi)$, on obtient, du fait que le vecteur ξ est constant dans le système $Oxyz$,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{xyz} \times \xi + \omega \times (\omega \times \xi) = \frac{\sum \mathbf{F} + \mathbf{R}}{M}.$$

On peut en tirer **R**.

149. Intégration des équations du mouvement. On a le système d'équations

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = Dh,$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \quad A < B < C.$$

Les cas de rotations constantes autour des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie par rapport à un point fixe sont évidents et on ne s'en occupera pas. On posera donc

$$A < D < B.$$

On tire des deux premières équations

$$p^2 = \frac{\begin{vmatrix} h - Bq^2 & C \\ Dh - B^2q^2 & C^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ A^2 & C^2 \end{vmatrix}} = \frac{B(C - B)}{A(C - A)}(f^2 - q^2)$$

avec

$$f^2 = \frac{h(C - D)}{B(C - B)} > 0.$$

On aura de même

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} A & h - Bq^2 \\ A^2 & Dh - B^2q^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ A^2 & C^2 \end{vmatrix}} = \frac{B(B - A)}{C(C - A)} (g^2 - q^2) \tag{6.3}$$

avec

$$g^2 = \frac{h(D - A)}{B(B - A)} > 0.$$

Etant donné que

$$f^2 - g^2 = \frac{h}{B} \frac{(B - D)(C - A)}{(C - B)(B - A)} > 0,$$

on a

$$g^2 < f^2.$$

Il s'ensuit que la formule (6.3) ne fournira pour r^2 des valeurs non négatives que si q peut varier dans l'intervalle $[-g, +g]$; $r^2 = 0$ lorsque $q^2 = g^2$. La quantité p ne change pas de signe et ne s'annule pas. Posons $p > 0$; on tire de la seconde équation d'Euler

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{(C - B)(B - A)}{AC}} \cdot \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}.$$

En effectuant les substitutions $q = gs$, $k^2 = \frac{g^2}{f^2} < 1$ on obtient

$$\frac{ds}{dt} = n\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}$$

avec

$$n = f\sqrt{\frac{(C - B)(B - A)}{AC}}.$$

On en tire

$$n(t - t_0) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2s^2)}}.$$

Dans le cas d'Euler l'intégration des équations du mouvement se réduit à des quadratures elliptiques.

150. Le *cas de la précession régulière* se présente lorsque l'ellipsoïde d'inertie a la forme d'un corps de révolution. Dans ce cas l'intégration des équations du mouvement s'effectue à l'aide de fonctions élémentaires.

Posons $A = B$. Faisons coïncider l'axe z_1 avec la direction constante par rapport à un espace fixe du vecteur moment des quantités de mouvement σ. Prenons pour axes x_1, y_1 deux axes fixes orthogonaux entre eux et à z_1 et passant par le point fixe O. La position des axes principaux x, y, z de l'ellipsoïde d'inertie par rapport aux axes fixes x_1, y_1, z_1 peut être définie à l'aide des angles d'Euler ψ, θ, φ (fig. 137). On a

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Dans le cas considéré on a

$$\sigma_x = Ap = \sigma \sin\theta \sin\varphi, \quad \sigma_y = Bq = \sigma \sin\theta \cos\varphi, \quad \sigma_z = Cr = \sigma \cos\theta.$$

Avec $A = B$, la troisième équation d'Euler donne

$$r = r_0.$$

Comme σ a une valeur constante et que $\cos\theta = Cr_0/\sigma$ est également constant, on a $\theta = \theta_0$. On aura simultanément

$$Ap = A\psi' \sin\theta \sin\varphi = \sigma \sin\theta \sin\varphi,$$
$$Aq = A\psi' \sin\theta \cos\varphi = \sigma \sin\theta \cos\varphi.$$

De ces équations on trouve pour l'angle ψ l'équation

$$A\psi' = \sigma$$

et après intégration on obtient

$$\psi = \frac{\sigma}{A} t + \text{const.}$$

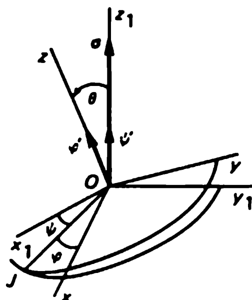


Fig. 137

De l'intégrale $r = r_0$ on obtient, en termes des angles d'Euler, la relation

$$r_0 = \psi' \cos\theta_0 + \varphi',$$

dont dérive l'équation différentielle définissant l'angle φ

$$\varphi' = \left(r_0 - \frac{\sigma}{A}\cos\theta_0\right).$$

Après intégration on obtient

$$\varphi = \left(r_0 - \frac{\sigma}{A}\cos\theta_0\right)t + \text{const}.$$

§ 4. Le cas de Lagrange

151. Dans le cas envisagé par Lagrange l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de l'axe z et le centre de gravité du corps solide se situe sur l'axe de symétrie dynamique à une distance ζ du point fixe O. On a donc $A = B$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta > 0$; le corps est pesant.

Intégrales premières

1. *Intégrale des forces vives.* Les déplacements réels figurent parmi les déplacements virtuels et les forces dérivent d'une fonction de force $U = -Mg\,\zeta_1$; ζ_1 est la distance entre le point fixe O et la projection du centre de gravité sur la verticale fixe Oz_1 (fig. 138). Le théorème des forces vives s'écrit

$$d\frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) = -Mg\,d\zeta_1,$$

d'où

$$Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 = h - 2\,Mg\,\zeta\cos\theta.$$

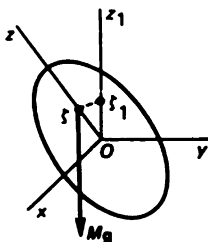


Fig. 138

2. *Intégrale des aires.* Le corps peut tourner autour de l'axe fixe z_1 et le moment des forces agissantes (actives) par rapport à l'axe z_1 est égal à zéro ($N_1 = 0$) car les forces de pesanteur sont parallèles à la verticale z_1. Il en découle l'intégrale des aires

$$\frac{d\sigma_{z_1}}{dt} = 0,$$

i.e.

$$\sigma_{z_1} = Ap\gamma + Aq\gamma' + Cr\gamma'' = k\,;$$

k est la constante d'intégration ; γ, γ', γ'' sont les cosinus directeurs de la verticale z_1 dans le repère $Oxyz$,

$$\gamma = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\theta.$$

3. *Intégrale de Lagrange.* La troisième équation d'Euler

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + N$$

donne dans le cas de Lagrange $A = B$, $N = 0$

$$r = r_0.$$

152. Les transformations. Ecrivons les intégrales premières sous la forme

$$r = r_0, \quad p^2 + q^2 = \alpha - a\cos\theta,$$
$$\sin\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = \beta - br_0\cos\theta$$

avec

$$\alpha = \frac{h - Cr_0^2}{A}, \quad a = \frac{2Mg\zeta}{A} > 0, \quad \beta = \frac{k}{A}, \quad b = \frac{C}{A} > 0.$$

En substituant à p, q, r leurs expressions en termes des angles d'Euler

$$p = \psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi,$$
$$q = \psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi,$$
$$r = \psi'\cos\theta + \varphi',$$

on obtient

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha - a\cos\theta,$$
$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \beta - br_0\cos\theta,$$
$$\frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} = r_0.$$

Multiplions la première équation par $\sin^2\theta$

$$\left(\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\sin\theta \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (\alpha - a\cos\theta)\sin^2\theta$$

et en utilisant la seconde équation il vient

$$(\beta - br_0\cos\theta)^2 + \left(\frac{d\cos\theta}{dt}\right)^2 = (\alpha - a\cos\theta)(1 - \cos^2\theta).$$

En y substituant $u = \cos\theta$ on obtient

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0u)^2 = f(u).$$

Cette équation conduit à une quadrature elliptique. On détermine ensuite les angles ψ et φ en intégrant les équations

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0u}{1 - u^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u\frac{\beta - br_0u}{1 - u^2}.$$

Dans les problèmes de mécanique le polynôme $f(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0u)^2$ possède trois racines réelles. En effet, à l'instant initial la valeur $u_0 = \cos\theta_0$ est contenue dans l'intervalle $(-1, +1)$ et $f(u_0) = \left(\frac{du}{dt}\right)_0^2 \geqslant 0$. Posons $f(u_0) > 0$; le cas où $f(u_0) = 0$ est plus simple. Lorsque $u = \pm 1$, on a $f(\pm 1) = -(\beta \mp br_0)^2 \leqslant 0$; posons $f(\pm 1) < 0$. Lorsque $u \to +\infty$, le signe du polynôme $f(u)$ dépend de celui de son terme le plus élevé

$$f(u) = au^3 + \ldots > 0$$

puisque $a > 0$.

Selon la règle des signes de Descartes le polynôme $f(u)$ possède trois racines réelles u_1, u_2, u' (fig. 139). Etant donné que lors du mouvement la valeur $u = \cos\theta$ doit être contenue dans l'intervalle $[-1, +1]$ où

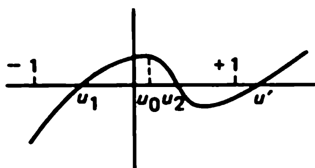


Fig. 139

$f(u) \geqslant 0$, u ne peut varier que dans l'intervalle

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2$$

et oscille entre u_1 et u_2.

153. Considérons une sphère de rayon unité dont l'origine se trouve en un point fixe (fig. 140). Aux racines u_1 et u_2 correspondent deux parallèles u_1 et u_2. La trace de l'axe z décrit sur la sphère une courbe comprise entre ces parallèles puisque u varie dans l'intervalle fermé $[u_1, u_2]$. Comme u est défini par une intégrale elliptique, z viendra en contact avec les parallèles.

Etablissons les types des courbes que peut décrire la trace de l'axe z sur la sphère. Pour ce faire on exprimera la tangente de l'angle que fait la trace de l'axe z sur la sphère avec le méridien $z_1 z_2$ à l'instant $t + dt$. Sur la figure 141 ZK est un arc de cercle de rayon $\sin \theta$. De toute évidence

$$(\breve{ZK}) = \sin \theta \, d\psi,$$
$$(\breve{KZ}') = d\theta,$$

de sorte que

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \theta \, d\psi}{d\theta} = \frac{\sin^2 \theta \, d\psi}{\sin \theta \, d\theta} = -\frac{(1 - u^2) d\psi}{du} = -\frac{\beta - br_0 u}{\sqrt{f(u)}}.$$

Voyons comment la trace de l'axe z vient frôler le disque u_j ($j = 1, 2$). Si sur le disque u_j l'expression figurant au numérateur est différente de zéro : $\beta - br_0 u_j \neq 0$, la courbe (z) touche ce disque puisque alors $\operatorname{tg} \vartheta = \infty$.

Dans le cas où sur le disque u_j on a $\beta - br_0 u_j = 0$, $\operatorname{tg} \vartheta$ de la courbe (z) possède sur ce disque une valeur indéterminée $0/0$. Levons cette indéter-

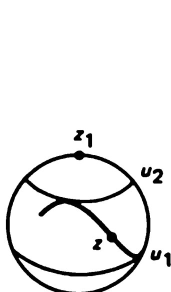


Fig. 140

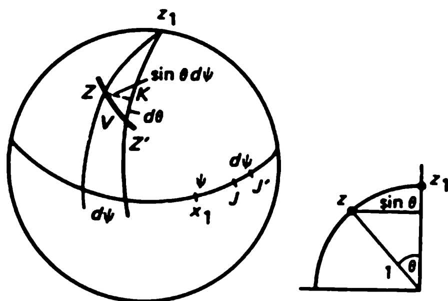


Fig. 141

mination à l'aide de la règle de L'Hospital :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{br_0}{(f'(u)/(2\sqrt{f(u)}))_{u=u_j}} = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, la courbe (z) s'approche du parallèle à angle droit.

Considérons le parallèle $\bar{u}$ défini par la racine de l'expression $\beta - br_0\bar{u} = 0$; sur ce parallèle $d\psi/dt = 0$. On doit envisager les cas suivants.

1° $\bar{u}$ se trouve hors de l'intervalle (u_1, u_2). La courbe (z) vient toucher les parallèles u_1 et u_2 et $d\psi/dt$ ne change pas de signe (fig. 140).

2° $\bar{u}$ est compris dans l'intervalle (u_1, u_2), $d\psi/dt$ change de signe sur le parallèle $\bar{u}$. La courbe (z) vient toucher les parallèles u_1 et u_2 et coupe à angle droit le parallèle $\bar{u}$ (fig. 142, *a*).

3° $\bar{u}$ coïncide avec u_j $(j = 1, 2)$. Nous allons démontrer que $\bar{u}$ ne peut coïncider avec u_1. Dans ce cas

$$f(\bar{u}) = (\alpha - a\bar{u})(1 - \bar{u}^2) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\alpha - a\bar{u} = 0, \quad \delta f = -a(1 - \bar{u}^2)\delta u - 2\bar{u}(\alpha - a\bar{u})\delta u = -a(1 - \bar{u}^2)\delta u.$$

On en conclut que $\delta f < 0$ lorsque $\delta u > 0$. Cela signifie que $\bar{u}$ ne peut coïncider qu'avec u_2 (cf. fig. 139).

Pour $\bar{u} = u_2$ la courbe (z) possède des points de rebroussement sur le parallèle supérieur u_2 (fig. 142, *b*).

Corollaire. Le cas illustré par la figure 142, *c* n'existe pas. Cela résulte de ce que les solutions dépendent de façon continue des constantes α et β et de ce que le cas $\bar{u} = u_1$ est exclu.

Précisons les conditions dans lesquelles les racines de $f(u)$ seront plus grandes que $1 - \delta$, où $\delta > 0$ est une petite constante. Dans le cas idéal $\theta_0 = 0$, $\theta_0' = 0$, $\psi_0' = 0$, $\alpha - a = 0$, $\beta = br_0$;

$$f(u) = (1 - u)^2[a(1 + u) - b^2r_0^2], \quad a(1 + u) - b^2r_0^2 = 0,$$

$$u = \frac{b^2r_0^2}{a} - 1 > 1 - \delta, \quad b^2r_0^2 - 2a > -a\delta ;$$

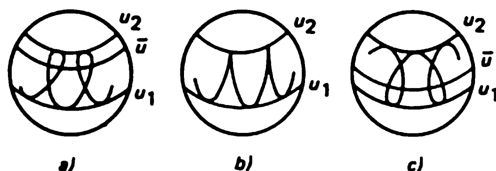


Fig. 142

pour δ aussi petit que l'on veut

$$b^2 r_0^2 - 2a > 0.$$

C'est la condition de stabilité de la toupie dormante de Lagrange.

154. Le gyroscope. Considérons le cas particulier où r_0 est très grand et $p_0 = q_0 = 0$. On aura alors $\theta_0' = 0$, $\psi_0' = 0$ ou pour $1 - u_0 \neq 0$

$$\bar{u} = u_0, \quad \alpha - a u_0 = 0, \quad \beta - b r_0 u_0 = 0,$$

ce qui correspond au 3° cas ci-dessus ;

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (u_0 - u)[a(1 - u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)],$$

l'une des racines est $u_2 = u_0 = \bar{u}$ et par suite

$$a(1 - u_1^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u_1) = 0,$$

ou encore

$$u_0 - u_1 = \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2}.$$

Si r_0 est très grand, u_1 est très proche de $u_0 = u_2$,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{b r_0 (u_0 - u)}{1 - u^2}.$$

Pour $r_0 > 0$ on a $\dfrac{d\psi}{dt} \geqslant 0$. C'est la précession pseudo-régulière (fig. 142, *b*).

Condition de la précession régulière. Les racines u_1 et u_2 coïncident :

$$f(u_0) = (\alpha - a u_0)(1 - u_0^2) - (\beta - b r_0 u_0)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{df}{du}\right)_{u_0} = -a(1 - u_0^2) - 2u_0(\alpha - a u_0) + 2 b r_0 (\beta - b r_0 u_0) = 0.$$

§ 5. Le cas de Kovalevskaïa

155. L'ellipsoïde d'inertie est un ellipsoïde symétrique allongé le long de l'axe Oz, $A = B = 2C$. Le centre de masse du corps solide est contenu dans le plan équatorial orthogonal à l'axe Oz (fig. 143), par exemple sur l'axe Ox ; on aura alors

$$\xi > 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

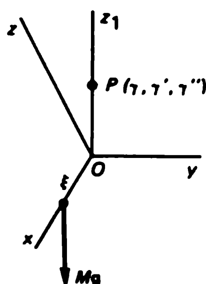


Fig. 143

1° *Equations d'Euler.* Le moment du poids par rapport aux axes de coordonnées liées au corps solide est donné par la matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 \\ -mg\gamma & -mg\gamma' & -mg\gamma'' \end{Vmatrix},$$

$$2\frac{dp}{dt} = qr, \quad 2\frac{dq}{dt} = -rp + c\gamma'', \quad \frac{dr}{dt} = -c\gamma',$$

$$c = \frac{mg\xi}{C}.$$

2° *Equations de Poisson* (immobilité du point $P(\gamma, \gamma', \gamma''))$:

$$\frac{d\gamma}{dt} + q\gamma'' - r\gamma' = 0, \quad \frac{d\gamma'}{dt} + r\gamma - p\gamma'' = 0, \quad \frac{d\gamma''}{dt} + p\gamma' - q\gamma = 0.$$

Sans préjudice pour la généralité on peut poser $c = 1$ vu que les équations de Poisson sont homogènes en $\gamma, \gamma', \gamma''$ et que $\gamma, \gamma', \gamma''$ figurent dans les équations d'Euler affectés de facteurs c constants.

156. Intégrales premières. 1° *Intégrale des forces vives.* Les déplacements réels figurent parmi les déplacements virtuels et les forces de pesanteur dérivent d'une fonction de force indépendante du temps

$$d\frac{1}{2}[2(p^2 + q^2) + r^2] = -d\gamma,$$

ou encore

$$p^2 + q^2 + \frac{r^2}{2} = -\gamma + h.$$

2° *Intégrale du moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale z_1.* Le corps peut tourner autour de la verticale z_1 ; le moment

résultant des forces de pesanteur par rapport à l'axe z_1 est égal à zéro

$$2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = k.$$

3° *Intégrale triviale*

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

4° *Intégrale de Kovalevskaïa.* Utilisons les notations

$$u = p^2 - q^2 - \gamma, \quad v = 2pq - \gamma'.$$

On a

$$\frac{du}{dt} = 2p\frac{dp}{dt} - 2q\frac{dq}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} = pqr + qrp - q\gamma'' + q\gamma'' - r\gamma' = r(2pq - \gamma'),$$

soit

$$\frac{du}{dt} = rv,$$

$$\frac{dv}{dt} = 2p\frac{dq}{dt} + 2q\frac{dp}{dt} - \frac{d\gamma'}{dt} = -rp^2 + p\gamma'' + rq^2 + r\gamma - p\gamma'' = - r(p^2 - q^2 - \gamma),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dv}{dt} = - ru.$$

On en tire

$$\frac{d}{dt}(u^2 + v^2) = 0, \quad u^2 + v^2 = \text{const.}$$

Le temps t ne figure pas explicitement dans les équations du mouvement. En éliminant t on obtient cinq équations pour lesquelles on connaît quatre intégrales premières. Selon la théorie du dernier facteur le problème se réduit aux quadratures. S. Kovalevskaïa démontre qu'outre les quatre cas envisagés par Euler et Lagrange, le cas de la symétrie cinétique complète $A = B = C$ et le cas qu'elle-même envisagea, il n'en existe aucun autre où la solution générale des équations du mouvement serait une fonction méromorphe dans le plan complexe de la variable t.

§ 6. Gyroscope suspendu par un système à la Cardan

Le problème relatif au mouvement d'un gyroscope pesant symétrique suspendu par un système à la Cardan, lorsque l'axe de l'anneau extérieur est vertical, présente de nombreuses similitudes avec le problème bien connu

du mouvement d'un solide pesant à point fixe dans le cas de Lagrange ; on peut aussi faire l'étude de la stabilité par rapport à l'angle de nutation.

157. Considérons le schéma du gyroscope suspendu par un système à la Cardan illustré par la figure 144. On y utilise les notations suivantes : x_1, y_1, z_1 sont des axes de coordonnées d'un repère fixe ; z_1 est l'axe de rotation de l'anneau extérieur ; ψ l'angle de rotation de l'anneau extérieur ; x l'axe de rotation de l'anneau intérieur ; θ l'angle de rotation de l'anneau intérieur ; x, y, z sont les axes de l'anneau intérieur ; φ est l'angle de rotation du gyroscope dans l'anneau intérieur.

Les projections de la vitesse angulaire de rotation de l'anneau intérieur sur les axes x, y, z sont

$$p^0 = \theta', \quad q^0 = \psi' \sin \theta, \quad r^0 = \psi' \cos \theta.$$

Les projections de la vitesse angulaire du gyroscope sur les axes de l'anneau intérieur sont

$$p = \theta', \quad q = \psi' \sin \theta, \quad r = \psi' \cos \theta + \varphi'.$$

La force vive de l'anneau extérieur est égale à

$$\frac{1}{2} J\psi'^2,$$

où J est le moment d'inertie de l'anneau par rapport à l'axe z_1.

La force vive de l'anneau intérieur est égale à

$$\frac{1}{2} (A^0p^{02} + B^0q^{02} + C^0r^{02}),$$

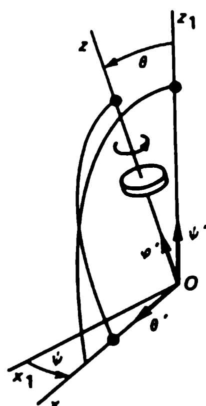


Fig. 144

où A^0, B^0, C^0 sont ses moments d'inertie par rapport aux axes x, y, z que nous identifierons avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie de l'anneau intérieur par rapport au point fixe O.

La force vive du gyroscope est égale à

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

A, B, C étant les moments d'inertie du gyroscope par rapport aux axes x, y, z.

On posera que l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope par rapport au point O est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe z, c.-à-d. que $A = B$.

La force vive totale est égale à

$$2T = \psi'^2[J + (A + B^0)\sin^2\theta + (C + C^0)\cos^2\theta] + \theta'^2(A + A^0) + C\varphi'^2 + 2C\varphi'\psi'\cos\theta.$$

Ecrivons les équations de mouvement de notre système sous la forme des équations de Lagrange vu que les variables ψ, θ, φ sont indépendantes et déterminantes (holonomes) :

$$(A + A^0)\theta'' - [(A + B^0)\sin\theta\cos\theta - (C + C^0)\sin\theta\cos\theta]\psi'^2 + C\varphi'\psi'\sin\theta = Q_\theta,$$

$$\frac{d}{dt}[\psi'[J + (A + B^0)\sin^2\theta + (C + C^0)\cos^2\theta] + C\varphi'\cos\theta] = Q_\psi,$$

$$\frac{d}{dt}C(\varphi' + \psi'\cos\theta) = Q_\varphi.$$

Ici $Q_\theta\delta\theta$ est le travail produit par les forces actives appliquées sur le système lorsque celui-ci tourne d'un angle $\delta\theta$ autour de l'axe x de l'anneau intérieur ; $Q_\psi\delta\psi$ le travail produit par ces forces lorsque l'anneau extérieur tourne avec l'anneau intérieur et le gyroscope d'un angle $\delta\psi$ autour de l'axe z_1 ; $Q_\varphi\delta\varphi$ le travail fourni par les forces actives lorsque le gyroscope tourne d'un angle $\delta\varphi$.

158. Supposons qu'il n'y a aucun frottement dans les paliers, que les seules forces actives sont les forces de pesanteur, que le centre de masse du gyroscope et de l'anneau intérieur se trouve sur l'axe z à une distance ζ de l'origine O et que l'axe z_1 est vertical. Les forces de pesanteur dérivent de la fonction de force

$$U = -mg\zeta\cos\theta.$$

Dans ces conditions les équations du mouvement permettent d'établir les intégrales premières suivantes :

1° $\varphi' + \psi' \cos\theta = r_0$,
2° $\psi'[J + (A + B^0)\sin^2\theta + (C + C^0)\cos^2\theta] + C\varphi'\cos\theta = k$,
3° $\psi'^2[J + (A + B^0)\sin^2\theta + (C + C^0)\cos^2\theta] +$
$(A + A^0)\theta'^2 + C\varphi'^2 + 2\,C\varphi'\psi'\cos\theta = -\,2\,mg\zeta\cos\theta + h.$

Les deux premières intégrales sont liées aux coordonnées cycliques respectives φ et ψ. La dernière intégrale est l'intégrale des forces vives que l'on peut évaluer directement puisque les déplacements réels font partie des déplacements virtuels ; r_0, k, h désignent respectivement les constantes des intégrales premières, m est la masse du gyroscope et de l'anneau intérieur.

159. Les deux premières intégrales permettent d'écrire

$$\psi' = \frac{k - Cr_0\cos\theta}{J + (A + B^0)\sin^2\theta + C^0\cos^2\theta}.$$

Le dénominateur est une quantité sûrement plus grande que zéro. Substituons cette expression de ψ' dans la troisième intégrale ; compte tenu de la première intégrale on obtient

$$\frac{(k - Cr_0\cos\theta)^2}{J + (A + B^0)\sin^2\theta + C^0\cos^2\theta} + (A + A^0)\theta'^2 = h - Cr_0^2 - 2mg\zeta\cos\theta.$$

Pour trouver les angles d'Euler ψ, θ, φ on obtient le système d'équations différentielles

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{(\alpha - au)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - br_0u)^2}{\varepsilon - eu^2},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0u}{\varepsilon - eu^2},\quad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u\,\frac{\beta - br_0u}{\varepsilon - eu^2},$$

où on a utilisé les notations

$$u = \cos\theta,\quad \alpha = \frac{h - Cr_0^2}{A + A^0},\quad a = \frac{2mg\zeta}{A + A^0} > 0,\quad \varepsilon = \frac{J + A + B^0}{A + A^0} > 0,$$

$$e = \frac{A + B^0 - C^0}{A + A^0},\quad \beta = \frac{k}{A + A^0},\quad b = \frac{c}{A + A^0} > 0.$$

Dans le cas de Lagrange

$$\varepsilon = 1,\quad e = 1.$$

La forme des équations différentielles relatives aux angles d'Euler ψ, θ, φ laisse apparaître que dans le cas d'un gyroscope pesant suspendu par un système à la Cardan les mouvements de nutation de l'axe du gyroscope

jouent le rôle principal comme dans le cas de Lagrange. Il est donc tout indiqué de commencer l'intégration par la première équation, ce qui donne

$$\int_{u_0}^{u} \frac{(\varepsilon - eu^2)du}{\sqrt{[(\alpha - au)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - br_0u)^2](\varepsilon - eu^2)(1 - u^2)}} = t - t_0.$$

Après inversion de cette intégrale hyperelliptique le calcul de ψ et de φ se réduit aux quadratures.

Utilisons la notation

$$f(u) = (\alpha - au)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - br_0u)^2.$$

Lorsque $e > 0$, ce qui a lieu dans tous les cas pratiquement intéressants, le polynôme $f(u)$ figurant dans notre problème de mécanique possède trois racines réelles

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} < u_1 \leqslant u_0, \quad u_0 \leqslant u_2 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}}, \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} < u' < \infty.$$

La valeur de u oscille sur un segment délimité par les points contigus -1, $+1$, u_1, u_2 entre lesquels se situe u_0.

Dans le cas d'une précession pseudo-régulière définie par les conditions initiales $\theta_0 \neq 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, r_0 numériquement très grand, on a $\beta - br_0u_0 = 0$, $\alpha - au_0 = 0$, et par conséquent

$$f(u) = (u_0 - u)[a(\varepsilon - eu^2) - b^2r_0^2(u_0 - u)],$$

d'où

$$u_0 - u_1 = \frac{a(\varepsilon - eu_1^2)}{b^2r_0^2} > 0.$$

Il s'ensuit que u oscillera, si r_0 est suffisamment grand, dans l'intervalle $(u_1, u_2 = u_0)$ qui est d'autant plus petit que r_0 est grand.

Pour le gyroscope considéré la précession peut être régulière ; pour cela le polynôme $f(u)$ doit avoir une racine multiple $u_1 = u_2 = u_0$, ce qui implique que $f(u_0) = 0$, $f'(u_0) = 0$. On tire de ces dernières égalités

$$(A + B^0 - C^0)u_0\psi_0'^2 - Cr_0\psi_0' + mg\zeta = 0.$$

Pour que cette équation de second degré en ψ_0' ait des racines réelles il faut que

$$C^2r_0^2 - 4(A + B^0 - C^0)u_0mg\zeta > 0,$$

ou

$$C^2\varphi_0'^2 - 4(A - C + B^0 - C^0)u_0\, mg\zeta > 0.$$

Cette condition joue le même rôle que la condition de stabilité de Mayevski pour le cas des obus.

La condition de la petitesse des écarts de u par rapport à l'unité pour le cas $e > 0$ peut être établie de la même façon que dans le cas de Lagrange. Il suffit d'exiger que les racines du polynôme $f(1 - \delta - z)$ soient négatives, ce qui implique que les racines du polynôme $f(u)$ se situent à droite de $1 - \delta$. δ désigne ici une petite constante positive, i.e. le plus petit nombre positif vérifiant les inégalités

$$b^2r_0^2 - 2ae + e(\alpha - a) + 3ae\delta > 0,$$

$$\{b^2r_0^2 + (\alpha - a(1-\delta))e - 2ae(1-\delta)\}\{2br_0(\beta - br_0(1-\delta)) - a(\varepsilon - e(1-\delta)^2) - 2e(1-\delta)(\alpha - a(1-\delta))\} - ae\{-(\alpha - a(1-\delta))(\varepsilon - e(1-\delta)^2) + (\beta - br_0(1-\delta)^2)\} > 0,$$

$$(\beta - br_0(1-\delta))^2 - (\alpha - a(1-\delta))(\varepsilon - e(1-\delta)^2) > 0.$$

On peut procéder à l'étude de ces équations dans le cas pratiquement important où $\theta_0 = 0$, $\theta_0'^2 > 0$, $\psi_0' = 0$ de façon analogue au cas de Lagrange.

§ 7. Cas particuliers d'intégration

160. Cas de Goriatchev-Tchaplyguine. Posons $A = B = 4C$, $\sigma_{z_1} = 0$, z_1 étant la verticale passant par le point fixe ; $\xi \neq 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, ce qui signifie que le centre de masse est contenu dans le plan équatorial.

Le moment de la force de pesanteur par rapport aux axes mobiles est donné par la matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 \\ -mg\gamma & -mg\gamma' & -mg\gamma'' \end{Vmatrix}.$$

Ecrivons les équations d'Euler

$$4C\frac{dp}{dt} = 3\,Cqr,$$

$$4C\frac{dq}{dt} = -\,3Cpr + mg\xi\gamma'',$$

$$C\frac{dr}{dt} = -\,mg\xi\gamma'.$$

Posons pour simplifier, $a = mg\xi/C$.

Ecrivons les équations de Poisson :

$$\frac{d\gamma}{dt} + q\gamma'' - r\gamma' = 0,$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} + r\gamma - p\gamma'' = 0,$$

$$\frac{d\gamma''}{dt} + p\gamma' - q\gamma = 0.$$

Les intégrales premières sont

1° $4(p^2 + q^2) + r^2 = -2a\gamma + h$ – intégrale des forces vives ;

2° $4(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 0$ — intégrale des aires ;

3° $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$ – intégrale triviale.

Dans le cas de Goriatchev-Tchaplyguine on trouve une quatrième intégrale

$$S = r(p^2 + q^2) - ap\gamma''.$$

En effet, en vertu des équations de mouvement

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{aq}{4}(4p\gamma + 4q\gamma' + r\gamma'').$$

A l'aide de la deuxième intégrale on obtient

4° $r(p^2 + q^2) - ap\gamma'' = \text{const.}$

161. Cas de Bobylev-Steklov. Posons $B = 2A$, $\xi = 0$, $\eta > 0$, $\zeta = 0$; le centre de masse se trouve sur l'axe Oy.

Les moments de la force de pesanteur par rapport aux axes liés au corps sont donnés par la matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & \eta & 0 \\ -mg\gamma & -mg\gamma' & -mg\gamma'' \end{Vmatrix}.$$

Ecrivons les équations d'Euler

$$A\frac{dp}{dt} = (2A - C)qr - mg\eta\gamma'',$$

$$2A\frac{dq}{dt} = (C - A)rp,$$

$$C\frac{dr}{dt} = -Apq + mg\eta\gamma.$$

Les équations de Poisson complètent le système.

D. Bobylev et V. Steklov ont trouvé la solution particulière suivante :

$$r = 0, \quad q = q_0, \quad p = \frac{mg\eta\gamma}{Aq_0} = \mu\gamma.$$

On démontre facilement que cette solution vérifie les deuxième et troisième équations d'Euler.

Pour le problème particulier les équations de Poisson s'écrivent

$$\begin{aligned} &\frac{d\gamma}{dt} + q_0\gamma'' = 0, \\ &\frac{d\gamma'}{dt} - \mu\gamma\gamma'' = 0, \\ &\frac{d\gamma''}{dt} + \mu\gamma\gamma' - q_0\gamma = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

La première équation d'Euler se met sous la forme

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\, q_0\gamma'',$$

elle est donc vérifiée simultanément avec les équations de Poisson. Multiplions les première et deuxième équations (6.4) respectivement par $\mu\gamma$ et q_0 et additionnons les résultats :

$$\mu\gamma\frac{d\gamma}{dt} + q_0\frac{d\gamma'}{dt} = 0.$$

On obtient l'intégrale

$$\mu\frac{\gamma^2}{2} + q_0\gamma' = J = \text{const.}$$

En résolvant par rapport à γ' et en utilisant l'intégrale triviale on obtient

$$\gamma'' = \sqrt{1 - \gamma^2 - \gamma'^2} = \sqrt{1 - \gamma^2 - \frac{1}{q_0^2}\left(J - \frac{\mu\gamma^2}{2}\right)^2}.$$

La première des équations (6.4) fournit pour γ une quadrature elliptique.

162. Cas de Hess. Considérons un ellipsoïde *de giration* dont l'équation relative aux principaux axes d'inertie du corps se présente pour le point O sous la forme

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1, \quad A > B > C. \tag{6.5}$$

Le cas de Hess a lieu lorsque : 1) le centre de gravité du corps se situe sur la normale donnée au point O au plan π de la section circulaire de l'ellipsoïde de giration ; 2) le vecteur moment des quantités de mouvement σ du corps est contenu à l'instant initial dans le plan π.

Cherchons l'expression analytique de ces conditions.

1. Les équations des plans des sections circulaires de l'ellipsoïde de giration résultent de l'intersection de la surface de cet ellipsoïde par une sphère

$$\frac{1}{B}(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Retranchons cette équation de l'équation (6.5), après quelques transformations on obtient

$$x^2(A - B)\,C - z^2(B - C)\,A = 0.$$

Cette équation se laisse décomposer en deux équations :

$$x\sqrt{C(A - B)} - z\sqrt{A(B - C)} = 0,$$
$$x\sqrt{C(A - B)} + z\sqrt{A(B - C)} = 0.$$

Posons que cette dernière équation définit le plan π ; soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à ce plan ;

$$\frac{\alpha}{\sqrt{C(A - B)}} = \frac{\beta}{0} = \frac{\gamma}{\sqrt{A(B - C)}}; \quad \beta = 0. \tag{6.6}$$

En notant ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité du corps la condition cherchée s'exprime par

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta} = \frac{\zeta}{\gamma},$$

ou encore

$$\eta = 0, \quad \frac{\xi}{\sqrt{C(A - B)}} = \frac{\zeta}{\sqrt{A(B - C)}}. \tag{6.7}$$

2. En notant σ_x, σ_y, σ_z les projections du vecteur moment des quantités de mouvement, la condition 2 s'exprime par la relation

$$(\sigma_x\alpha + \sigma_y\beta + \sigma_z\gamma)_0 = 0.$$

Comme $(\sigma_x)_0 = Ap_0$, $(\sigma_z)_0 = Cr_0$, il résulte de (6.6) et (6.7)

$$Ap_0\sqrt{C(A - B)} + Cr_0\sqrt{A(B - C)} = 0$$

et

$$Ap_0\xi + Cr_0\zeta = 0.$$

Ecrivons les équations de mouvement

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + mg\zeta\gamma',$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)pr - \zeta mg\gamma + \xi mg\gamma'',$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq - mg\xi\gamma'.$$

Les équations de Poisson complètent le système.

Les intégrales premières sont les suivantes :

1° $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -2mg(\xi\gamma + \zeta\gamma'') + h$ – intégrale des forces vives ;

2° $Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = k$ – intégrale des aires ;

3° $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$.

Multiplions la première et la troisième équation d'Euler respectivement par ξ et ζ et additionnons :

$$A\xi\frac{dp}{dt} + C\zeta\frac{dr}{dt} = q[(B - C)\xi r + (A - B)\zeta p]. \qquad (6.8)$$

Le premier membre est égal à $\frac{d}{dt}(A\xi p + C\zeta r)$. Elevons au carré l'équation (6.7) et multiplions le tout par AC :

$$\frac{A\xi^2}{A - B} = \frac{C\zeta^2}{B - C} = \frac{1}{\mu}.$$

Comme

$$A - B = \mu A\xi^2, \quad B - C = \mu C\zeta^2,$$

le second membre de (6.8) peut s'écrire sous la forme

$$\mu q\xi\zeta(Ap\xi + Cr\zeta).$$

Ainsi l'équation (6.8) possède une solution particulière.

4° $Ap\xi + Cr\zeta = 0$.

163. Joukovski trouve une interprétation géométrique du cas de Hess. Soit $C(\xi, 0, \zeta)$ le centre de masse du corps. Les projections u, v, w de la vitesse du point C s'écrivent alors sous la forme

$$u = q\zeta, \quad v = r\xi - p\zeta, \quad w = -q\xi.$$

Notons T^* la force vive d'un point matériel de masse m (masse du corps) situé au centre de masse C :

$$T^* = \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{m}{2}(q^2\zeta^2 + r^2\xi^2 + p^2\zeta^2 + q^2\xi^2 - 2rp\xi\zeta).$$

En utilisant l'intégrale particulière de Hess on obtient

$$-2rp\xi\zeta = r\zeta(-p\xi) + p\xi(-r\zeta) = \frac{Cr^2\zeta^2}{A} + \frac{Ap^2\xi^2}{C}$$

et

$$T^* = \frac{m}{2}\left[p^2\left(\zeta^2 + \frac{A}{C}\,\xi^2\right) + q^2(\xi^2 + \zeta^2) + r^2\left(\xi^2 + \frac{C}{A}\,\zeta^2\right)\right].$$

Comme

$$\frac{\xi^2}{C(A-B)} = \frac{\zeta^2}{A(B-C)} = \frac{\varrho^2}{B(A-C)}, \quad \varrho^2 = \xi^2 + \zeta^2, \tag{6.9}$$

on a

$$T^* = \frac{m}{2}\varrho^2\left[p^2\left(\frac{A(B-C)}{B(A-C)} + \frac{AC(A-B)}{CB(A-C)}\right) + q^2\left(\frac{C(A-B)}{B(A-C)} + \frac{A(B-C)}{B(A-C)}\right) + r^2\left(\frac{C(A-B)}{B(A-C)} + \frac{CA(B-C)}{AB(A-C)}\right)\right] = \frac{m\varrho^2}{B}\cdot\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

i.e. $T^* = \varepsilon^2 T = \varepsilon^2(-2mgz_c + h)$, où $\varepsilon^2 = m\varrho^2/B$ et où on a utilisé l'intégrale des forces vives.

On détermine les projections du moment de la quantité de mouvement σ^* du point de masse m, situé au centre de masse du corps, à l'aide de la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \xi & 0 & \zeta \\ mq\zeta & m(r\xi - p\zeta) & -mq\xi \end{matrix}\right\|,$$

$$\sigma^*_x = -\zeta m(r\xi - p\zeta), \quad \sigma^*_y = mq(\xi^2 + \zeta^2), \quad \sigma^*_z = \xi m(r\xi - p\zeta).$$

Il résulte de l'intégrale de Hess et de (6.9) que

$$\sigma^*_x = mp\left(\zeta^2 + \frac{A}{C}\,\xi^2\right) = m\varrho^2 p\left(\frac{A(B-C)}{B(A-C)} + \frac{A}{C}\,\frac{C(A-B)}{B(A-C)}\right) = \frac{m\varrho^2}{B}\,Ap,$$

$$\sigma^*_y = mq\varrho^2 = \frac{m\varrho^2}{B}\,Bq, \quad \sigma^*_z = \frac{m\varrho^2}{B}\,Cr,$$

i.e.

$$\sigma^* = \varepsilon^2\sigma.$$

Mais comme $\sigma_{z_1} = k$, $\sigma^*_{z_1} = \varepsilon^2 k$. Dans le cas de Hess le centre de masse se meut comme un pendule sphérique à condition que l'on remplace l'accélération de la pesanteur par $g' = \varepsilon^2 g$.

Considérons dans le plan π un point β de coordonnées $x = 0$, $y = \sqrt{B}$, $z = 0$. Les projections de sa vitesse $\mathbf{v}_\beta$ sont données par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} p & q & r \\ 0 & \sqrt{B} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad u_\beta = -\sqrt{B}r, \quad v_\beta = 0, \quad w_\beta = \sqrt{B}p.$$

Notons θ l'angle que fait $\mathbf{v}_\beta$ avec le plan π. On a alors

$$\sin\theta = \cos(\mathbf{v}_\beta, \mathbf{n}) = \frac{u_\beta\alpha + w_\beta\gamma}{\sqrt{u_\beta^2 + w_\beta^2}} =$$

$$\frac{-r\sqrt{B}\sqrt{C(A-B)/(B(A-C))} + p\sqrt{B}\sqrt{A(B-C)/(B(A-C))}}{\sqrt{B}\sqrt{p^2+r^2}} =$$

$$\frac{p\sqrt{A(B-C)} - r\sqrt{C(A-B)}}{\sqrt{B(A-C)}\sqrt{p^2+r^2}} = \frac{\sqrt{AC}}{\sqrt{B(A-C)}}\,\frac{p\sqrt{(B-C)/C} - r\sqrt{(A-B)/A}}{\sqrt{p^2+r^2}}.$$

En utilisant l'intégrale de Hess et (6.9) on obtient

$$\frac{p}{r} = -\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}},$$

et, partant,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{AC}}{\sqrt{B(A+C-B)}},$$

i.e. θ ne varie pas.

§ 8. Equations du mouvement d'un corps solide libre

164. Considérons le mouvement d'un corps solide absolument libre soumis à l'action de forces connues $\mathbf{F}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$).

Il n'existe aucune liaison autre que celles qui expriment que ce système de points matériels constitue un corps solide.

Notons G le centre de masse du corps solide dont les coordonnées sont ξ, η, ζ dans un repère xyz fixe.

Parmi les déplacements virtuels du corps solide on trouve des mouvements de translation le long des trois axes ; on peut donc appliquer la loi du mouvement du centre de masse le long des axes de coordonnées :

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\nu, \quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_\nu, \quad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z_\nu. \tag{6.10}$$

Parmi les déplacements virtuels figurent aussi les rotations autour d'un axe quelconque. On peut donc utiliser le théorème sur le moment des quantités de mouvement par rapport aux axes considérés. Cependant l'utilisation de ce théorème est peu commode avec le système de coordonnées indiqué ci-dessus.

Le corps solide peut non seulement tourner sur n'importe quel axe mais peut aussi exécuter des mouvements de translation le long de tous les axes. On peut donc utiliser le théorème sur le moment des quantités de mouvement par rapport à tous les axes de coordonnées concernant le mouvement relatif (mouvement par rapport aux axes de König passant par le centre de masse). Ce théorème est également d'une application malaisée.

Il est préférable de formuler ces théorèmes par rapport à des axes liés à l'ellipsoïde d'inertie central construit par rapport au point G.

Construisons deux systèmes d'axes de coordonnées supplémentaires, dont l'origine commune se trouve au point G (centre de masse du solide) : $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — axes parallèles aux axes fondamentaux $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ pendant tout le temps que dure le mouvement (axes de König) et $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — axes liés au corps solide et orientés suivant ces principaux axes centraux d'inertie.

Le théorème du moment des quantités de mouvement par rapport aux axes de König, mais formulé en termes des axes $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, conduit aux équations dynamiques d'Euler

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + L,\\
B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + M,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + N,
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

où A, B, C sont des constantes.

Les équations (6.10) et (6.11) sont indépendantes les unes des autres et correspondent ensemble au nombre de degrés de liberté du solide absolument libre, qui est égal à six. Les variables qui caractérisent ces six degrés de liberté sont : ξ, η, ζ, ψ, θ, φ.

Ainsi le mouvement d'un corps solide absolument libre est décomposé en un mouvement du centre de masse (équations (6.10)) et en un mouvement autour du centre de masse qui est un mouvement autour d'un point fixe (équations (6.11)). Ces deux types de mouvement ont déjà été analysés en dynamique du point et en rotation du solide autour d'un point fixe.

CHAPITRE VII

DYNAMIQUE ANALYTIQUE

165. En 1788 fut publiée la « Mécanique analytique » de Lagrange. Dans cet ouvrage Lagrange, à la suite d'une étude approfondie des problèmes déjà résolus et des considérations les concernant, formula et développa les principes fondamentaux de la dynamique analytique.

Après Lagrange il n'y eut pas beaucoup d'idées vraiment nouvelles : Hamilton développa les analogies optico-mécaniques ; Gauss établit le principe de la moindre contrainte ; dans les travaux de Lagrange, Laplace, Poisson, Poincaré, Liapounov, à travers les problèmes cosmogoniques fondamentaux apparut spontanément le principe de la stabilité.

Dans notre cours de mécanique générale la dynamique analytique sera réduite conformément au programme.

§ 1. Les liaisons

166. Imaginons un espace fixe $Oxyz$ dans lequel se trouve un système matériel composé de points matériels P_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Soit m_ν la masse du point P_ν, dont les coordonnées cartésiennes sont x_ν, y_ν, z_ν.

Supposons que le mouvement du système soit limité par des liaisons. Les déplacements élémentaires δx_ν, δy_ν, δz_ν que le point P_ν pourrait effectuer, si à l'instant t considéré les liaisons étaient « gelées », sont appelés *déplacements virtuels du point P_ν*.

Quant aux déplacements dx_ν, dy_ν, dz_ν du point P_ν, qu'il effectue réellement au cours du temps dt sous l'action des forces appliquées, on les appellera *déplacements réels du point P_ν*. Si le système matériel est soumis à des liaisons, les déplacements réels de ses différents points ne peuvent être absolument arbitraires, étant limités par certaines relations dont la forme générale est

$$\begin{aligned} dx_\nu &= a_\nu^1 dq_1 + \ldots + a_\nu^k dq_k + a_\nu^0 dt, \\ dy_\nu &= b_\nu^1 dq_1 + \ldots + b_\nu^k dq_k + b_\nu^0 dt, \\ dz_\nu &= c_\nu^1 dq_1 + \ldots + c_\nu^k dq_k + c_\nu^0 dt \\ &\qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Les coefficients a_ν^s, b_ν^s, c_ν^s sont des fonctions dépendant des positions des points P_ν du système et éventuellement du temps t. Les variables auxiliaires q_s sont supposées être indépendantes les unes des autres et sont appelées *coordonnées de Lagrange* ; k est le *nombre de degrés de liberté*. Le système des équations (7.1) est une définition analytique des liaisons imposées au système matériel.

Le système des équations (7.1) est un système d'équations différentielles de Pfaff. Si les équations (7.1) ne sont pas intégrables, les liaisons sont dites *non holonomes*, et *holonomes* si elles sont intégrables.

Exemple de liaisons non holonomes. Roulement sans glissement d'une boule sur un plan (fig. 145) ; a est le rayon de la boule; ξ, η, φ, ψ, θ sont des variables, avec ξ, η les coordonnées du centre G de la boule, et φ, ψ, θ les angles d'Euler. La vitesse absolue du point P est égale à zéro ; $(\xi', \eta', 0)$ sont les projections de la vitesse d'entraînement du point P, $\begin{Vmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & -a \end{Vmatrix}$ est sa vitesse relative ; p, q, r sont les projections de la vitesse angulaire instantanée de la boule sur les axes $Gxyz$. Les équations des liaisons sont

$$\xi' - qa = 0, \quad \eta' + pa = 0,$$
$$p = \varphi' \sin\theta \sin\psi + \theta' \cos\psi, \quad q = -\varphi' \sin\theta \cos\psi + \theta' \sin\psi.$$

De toute évidence les équations des liaisons ne sont pas intégrables puisqu'on ne peut mettre la première équation sous la forme $\frac{d}{dt} f(\xi, \varphi, \psi, \theta) = 0$ vu que ψ' n'y figure pas et que ψ y figure. Une remarque analogue concerne la deuxième équation.

Dans le cas de liaisons holonomes on arrive à mettre les équations des liaisons (7.1) sous une forme définitive, particulièrement commode

$$\begin{gathered} x_\nu = x_\nu(t, q_1, \ldots, q_k), \quad y_\nu = y_\nu(t, q_1, \ldots, q_k), \\ z_\nu = z_\nu(t, q_1, \ldots, q_k) \ (\nu = 1, \ldots, n), \end{gathered} \tag{7.2}$$

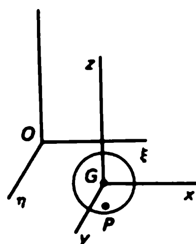


Fig. 145

où $q_1, \ldots, q_k$ sont les coordonnées généralisées de Lagrange (déterminantes ou holonomes).

Une dérivation simple de (7.2) fournit

$$a_\nu^s = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \quad b_\nu^s = \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}, \quad c_\nu^s = \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}.$$

Exemple de coordonnées non holonomes. La position du point sur un plan peut être définie à l'aide des coordonnées indépendantes r, σ ; $\sigma' = r^2\theta'$; r, σ sont des coordonnées non holonomes car on ne peut exprimer les coordonnées cartésiennes du point à l'aide de r et σ sous la forme (7.2).

167. Par définition les déplacements δx_ν, δy_ν, δz_ν des points P_ν du système matériel sont virtuels (dans le sens que ce terme possède en statique analytique) si le temps est fixé ($dt = 0$). Cette proposition permet d'écrire directement, pour les liaisons de forme générale, les relations suivantes pour les déplacements virtuels :

$$\delta x_\nu = \sum_s a_\nu^s \delta q_s, \quad \delta y_\nu = \sum_s b_\nu^s \delta q_s, \quad \delta z_\nu = \sum_s c_\nu^s \delta q_s \quad (\nu = 1, \ldots, n). \quad (7.3)$$

Dans le cas des liaisons holonomes on déduit de (7.2), à l'aide de considérations analogues, les relations suivantes :

$$\delta x_\nu = \sum_s \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_\nu = \sum_s \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta z_\nu = \sum_s \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \delta q_s. \quad (7.4)$$

Dans les formules (7.3) et (7.4) les quantités δq_s représentent de petites variations arbitraires des variables indépendantes de Lagrange q_s *).

168. Posons que les points P_ν du système considéré sont soumis à l'action non seulement des liaisons mais encore de forces $\mathbf{F}_\nu$ dont les projections sur les axes rectangulaires sont X_ν, Y_ν, Z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Au cours du mouvement du système matériel déterminé par l'action de ces forces les liaisons exerceront sur les différents points P_ν du système des actions que l'on appelle réactions $\mathbf{R}_\nu$ ($R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$).

Dans la définition des réactions $\mathbf{R}_\nu$ nous supposons que l'action mécanique des liaisons sur le système est complètement prise en compte dans le sens que les liaisons peuvent être remplacées par les réactions qu'elles provoquent et qu'en remplaçant les liaisons par les réactions on peut représenter chaque point P_ν comme se déplaçant tout à fait librement sous l'action de la force donnée $\mathbf{F}_\nu(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ et de la réaction des liaisons $\mathbf{R}_\nu(R_{\nu x}$,

*) Les liaisons holonomes jouissent de la propriété $d\delta x_\nu/dt = \delta dx_\nu/dt, \ldots$ Pour les liaisons holonomes δf a la signification d'une différentielle lorsque t ne varie pas.

$R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$) :

$$m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu + R_{\nu x}, \quad m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = Y_\nu + R_{\nu y},$$
$$m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = Z_\nu + R_{\nu z} \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{7.5}$$

169. Les liaisons imposées au système dépendent de la nature physique des mécanismes réalisant ces liaisons. En conséquence, la caractéristique des liaisons doit figurer dans la mécanique sous la forme d'un axiome exprimant les relations expérimentales existant réellement. En qualité d'axiome on a adopté la définition de la liaison parfaite :

$$\sum_\nu (R_{\nu x}\delta x_\nu + R_{\nu y}\delta y_\nu + R_{\nu z}\delta z_\nu) = 0. \tag{7.6}$$

La somme des travaux élémentaires effectués par les réactions des liaisons au cours d'un déplacement virtuel arbitraire du système est égale à zéro. Cet axiome constitue une généralisation des observations sur les réactions de surfaces lisses ordinaires.

§ 2. Principe d'Euler-Lagrange

170. Si on détermine $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ à l'aide des équations (7.5) et si on les porte ensuite dans (7.6), on obtient la relation fondamentale de la dynamique analytique

$$\sum_\nu \left[\left(m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\delta x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} - Y_\nu\right)\delta y_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} - Z_\nu\right)\delta z_\nu\right] = 0. \tag{7.7}$$

Cette relation valable pour n'importe quel déplacement virtuel du système soumis à l'action de liaisons parfaites établit une relation entre les déplacements virtuels δx_ν, δy_ν, δz_ν réalisables en présence des liaisons imposées, les forces X_ν, Y_ν, Z_ν appliquées sur le système et les accélérations $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$, $\frac{d^2y_\nu}{dt^2}$, $\frac{d^2z_\nu}{dt^2}$ déterminées par les forces appliquées en présence des liaisons.

Lagrange suggéra d'appeler *principe de D'Alembert* la relation (7.7). Lorsque toutes les accélérations sont nulles et que le système est à l'état d'équilibre, le principe de D'Alembert (principe d'Euler-Lagrange) devient le principe fondamental de la statique analytique — le principe des déplacements virtuels de Bernoulli.

171. Dans le principe d'Euler-Lagrange les réactions des liaisons ne figurent pas. Les relations que l'on peut en déduire directement seront des équations différentielles de mouvement.

Si on sélectionne parmi tous les déplacements virtuels un système de déplacements indépendants que l'on portera dans l'expression du principe d'Euler-Lagrange, on obtiendra un système complet d'équations différentielles indépendantes du mouvement.

Si parmi tous les déplacements virtuels on en sélectionne un et qu'on le porte dans l'expression du principe d'Euler-Lagrange, la relation obtenue sera ou bien l'une des équations différentielles de mouvement ou un corollaire de ces équations.

En qualité d'exemples importants on peut citer les théorèmes généraux de la dynamique des systèmes (cf. p. 161).

172. Le lien entre les équations différentielles de mouvement et le groupe des déplacements virtuels a été établi dans toute sa plénitude par Poincaré (cf. complément II).

§ 3. Principe de Hamilton

173. Hamilton énonça pour le cas de liaisons holonomes parfaites un principe variationnel important de la mécanique — le principe de la moindre action.

Supposons connues les positions réelles P_0 et P_1 d'un système aux instants t_0 et t_1 au cours d'un mouvement déterminé ; x_ν, y_ν, z_ν seront alors des fonctions du temps satisfaisant aux liaisons et prenant pour $t = t_0$ et $t = t_1$ des valeurs correspondant aux positions P_0 et P_1. Posons que $x_\nu + \delta x_\nu$, $y_\nu + \delta y_\nu$, $z_\nu + \delta z_\nu$ sont des fonctions de t peu différentes de x_ν, y_ν, z_ν vérifiant les équations des liaisons et prenant pour $t = t_0$ et $t = t_1$ les mêmes valeurs que x_ν, y_ν, z_ν. En conséquence, les expressions de δx_ν, δy_ν, δz_ν signifieront des déplacements virtuels qui disparaissent pour $t = t_0$ et $t = t_1$.

Pour établir le principe de Hamilton intégrons l'expression (7.7) du principe d'Euler-Lagrange par rapport au temps entre t_0 et t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\left(m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu\right)\delta x_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} - Y_\nu\right)\delta y_\nu + \left(m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} - Z_\nu\right)\delta z_\nu\right] dt = 0. \quad (7.8)$$

Dans le cas des liaisons holonomes l'intégration par parties fournit le résultat suivant :

$$\int_{t_0}^{t_1} m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2}\,\delta x_\nu dt = \left[m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\,\delta x_\nu\right]_0^1 - \int_{t_0}^{t_1} \delta\frac{m_\nu}{2}\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 dt =$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \delta\,\frac{m_\nu}{2}\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^2 dt.$$

On obtient des résultats analogues pour y et z. L'expression (7.8) peut être amenée maintenant à la forme

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T + \sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu)\right] dt = 0, \tag{7.9}$$

où T désigne la force vive du système. L'expression (7.9) résume le principe de la moindre action de Hamilton pour le cas général où les forces appliquées sont données.

Le principe de Hamilton (7.9) prend une forme particulièrement simple dans le cas où les forces X_ν, Y_ν, Z_ν dérivent d'une fonction de force U:

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Dans ce cas

$$\sum (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) = \delta U,$$

et le principe de Hamilton s'écrit sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0. \tag{7.10}$$

Cela signifie que pour un mouvement réel $\int_{t_0}^{t_1} (T + U)dt$ possède une valeur stationnaire ; en approfondissant la question on démontre que l'intégrale prend une valeur minimale lorsque l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$ est suffisamment petit.

174. A l'aide du principe de Hamilton on établit facilement les équations différentielles de mouvement en coordonnées généralisées de Lagrange q_s. Posons que les liaisons holonomes sont décrites à nouveau par les équations

$$x_\nu = x_\nu(t, q_1, \ldots, q_k), \quad y_\nu = y_\nu(t, q_1, \ldots, q_k), \quad z_\nu = z_\nu(t, q_1, \ldots, q_k).$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{\nu} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) =$$

$$\sum_{s} \delta q_s \left[\sum_{s} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right) \right] = \sum Q_s \delta q_s,$$

avec $Q_s = \sum_{\nu} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right)$. Si on remplace x_ν', y_ν', z_ν' dans l'expression de la force vive T par leurs expressions en termes des coordonnées de Lagrange, on obtiendra $T = T(t, q_1, \ldots, q_k, q_1', \ldots, q_k')$.

En appliquant le principe de Hamilton on obtient

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{s} \frac{\partial T}{\partial q_s'} \delta q_s' + \sum_{s} \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \sum Q_s \delta q_s \right) dt = 0,$$

et après intégration par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s} \delta q_s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right] dt = 0.$$

Cette relation doit être nulle quelles que soient les variations des coordonnées indépendantes de Lagrange ; il s'ensuit que l'expression entre crochets doit être nulle :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{7.11}$$

Les équations différentielles (7.11) décrivant le mouvement du système sont appelées *équations de Lagrange de second ordre.*

Dans le cas où les forces X_ν, Y_ν, Z_ν dérivent d'une fonction de force U, $Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}$ et les équations de Lagrange de second ordre s'écrivent sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Les équations de Lagrange sont particulièrement commodes lorsque l'expression $T(t, q_1, \ldots, q_k, q_1', \ldots, q_k')$ se laisse établir aisément. Il convient de noter que l'on ne peut écrire les équations de Lagrange qu'en utili-

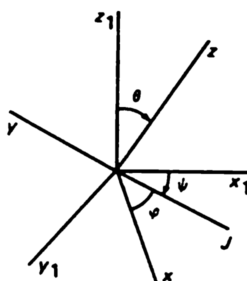


Fig. 146

sant les coordonnées q_s ($s = 1, \ldots, k$) qui permettent d'exprimer les coordonnées cartésiennes x_ν, y_ν, z_ν sous une forme finie.

175. A titre d'exemple nous allons retrouver les équations d'Euler pour un corps solide à point fixe (fig. 146). Ce solide est soumis aux contraintes imposées par des liaisons holonomes et les coordonnées de ses différents points peuvent être définies à l'aide des angles d'Euler θ, φ, ψ que font les axes du repère fixe $Ox_1y_1z_1$ et ceux du repère mobile $Oxyz$. Pour simplifier on prendra pour axes mobiles $Oxyz$ les axes de l'ellipsoïde d'inertie du solide par rapport au point fixe O. On sait que la force vive du solide s'exprime par

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

où

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

En adoptant θ, φ, ψ en qualité de coordonnées de Lagrange q_s on obtient l'équation de Lagrange de second ordre pour l'angle φ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

On a $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi'} = \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial \varphi'} = Cr$, $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial \varphi} = (A - B)pq$, puisque $\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = q$, $\dfrac{\partial q}{\partial \varphi} = -p$. On en tire

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + N.$$

Explicitons la signification de N. Posons que seul φ varie. On aura alors

$$\begin{pmatrix} \delta x_\nu \\ \delta y_\nu \\ \delta z_\nu \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \delta\varphi \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \end{Vmatrix}.$$

En écrivant l'expression du travail produit on trouve, pour $\delta\varphi \neq 0$, $\sum (X_\nu \delta x_\nu + \ldots) = N\delta\varphi$.

On obtient les autres équations d'Euler en changeant les symboles des axes.

§ 4. Equations canoniques

176. Pour le cas de systèmes mécaniques à liaisons holonomes parfaites et soumis à l'action de forces dérivant d'une fonction de force U, Hamilton a trouvé une nouvelle forme des équations différentielles de mouvement. Remplaçons les vitesses q_s' par de nouvelles variables

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Les variables p_s portent le nom d'*impulsions conjuguées aux coordonnées de Lagrange* q_s. Comme la forme de plus haut degré en q_s' figurant dans l'expression de la force vive T est une forme quadratique définie positive, les formules de transition des variables q_s' à p_s sont réciproquement univoques.

Le principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0,$$

appliqué aux systèmes placés sous la contrainte de liaisons holonomes parfaites et soumis à l'action des forces dérivant d'une fonction de force U, peut être écrit sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_s p_s \frac{dq_s}{dt} - \left(\sum_s p_s q_s' - T - U \right) \right] dt = 0.$$

En posant

$$H = \sum_s p_s q_s' - T - U = H(t, q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k), \tag{7.12}$$

on obtient

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_s p_s \frac{dq_s}{dt} - H \right) dt = 0.$$

Lorsque les bornes sont fixées par rapport à q_s *), le principe de Hamilton permet d'obtenir, à l'aide des procédés connus du calcul variationnel, les équations différentielles décrivant le mouvement du système **) :

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{7.13}$$

Ce sont les *équations de Hamilton* appelées encore *équations canoniques*. Nous montrerons plus tard toute leur importance théorique.

177. Considérons le cas particulier où nos liaisons holonomes ne dépendent pas explicitement du temps. La force vive T sera alors une forme quadratique définie positive des dérivées q_s'. La fonction de Hamilton

$$H = \sum_s p_s q_s' - T - U = \sum_s \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s' - T - U = 2T - T - U$$

prend alors la signification de l'énergie totale du système

$$H = T - U.$$

Dans ce cas H ne dépend évidemment pas explicitement du temps et on peut déduire de (7.13) que

$$\frac{dH}{dt} = \sum_s \frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} \equiv 0.$$

Il en résulte que la fonction de Hamilton ne change pas de valeur au cours d'un mouvement réel et représente l'intégrale première

$$H \equiv h,$$

i.e. l'intégrale des forces vives.

178. Supposons maintenant que les liaisons imposées au système dépendent explicitement du temps. Considérons la fonction

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)dt \tag{7.14}$$

que l'on appelle généralement *action* et que l'on intègre le long de la trajectoire pour laquelle les coordonnées q_s et les impulsions p_s doivent vérifier les équations canoniques (7.13). Convenons d'entendre par action V une

*) C'est la forme de Poincaré du principe de Hamilton où δp, δq sont arbitraires dans l'intervalle considéré et où $\delta q = 0$ lorsque $t = t_0, t_1$.

**) $q_s' = \partial H/\partial p_s$ — résultat qui provient des transformations.

fonction des variables t, q_s, q_s^0, où q_s^0 désigne les valeurs des coordonnées q_s à l'instant $t = t_0$.

Voyons comment varie l'action V lorsqu'on passe d'un mouvement à un autre par suite de petites variations des données initiales.

Ecrivons V sous une forme quelque peu différente :

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_s p_s \frac{dq_s}{dt} - H \right) dt.$$

Lorsque les bornes ne sont pas fixées

$$\delta V = \left[\sum_s p_s \delta q_s \right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \left[\sum_s \delta p_s \left(\frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) + \sum_s \delta q_s \left(- \frac{dp_s}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \right] dt.$$

Or les coordonnées q_s et les impulsions p_s doivent nécessairement vérifier les équations canoniques (7.13) puisque l'intégrale figurant dans la fonction d'action doit être calculée dans le sens du mouvement du système ; dans la dernière formule l'intégrale disparaît

$$\delta V = \sum_s p_s \delta q_s - \sum_s p_s^0 \delta q_s^0.$$

La variation de la fonction $V(t, q_1, \ldots, q_k, q_1^0, \ldots, q_k^0)$ se présente sous la forme

$$\delta V = \sum_s \frac{\partial V}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_s \frac{\partial V}{\partial q_s^0} \delta q_s^0.$$

Les deux expressions de la variation δV d'une seule et même fonction d'action V, qui sont valables pour n'importe quelles valeurs de δq_s et δq_s^0, permettent d'obtenir les résultats suivants :

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}, \quad - p_s^0 = \frac{\partial V}{\partial q_s^0} \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{7.15}$$

Ces relations sont extrêmement intéressantes. Le dernier groupe d'équations détermine la loi du mouvement du système $q_s = q_s(t, q_1^0, \ldots, q_k^0, p_1^0, \ldots, p_k^0)$, tandis que le premier groupe détermine les impulsions correspondantes. Il s'ensuit que, connaissant l'action V, on peut résoudre le problème fondamental de la mécanique à l'aide des formules simples (7.15).

179. Le calcul de l'action V à l'aide de la formule (7.14) suppose que l'on connaisse la loi du mouvement de notre système matériel. Il n'est donc

pas étonnant que nous ayons trouvé si simplement, dans les formules (7.15), ce que nous avons supposé connu dès le début. Afin d'éviter les difficultés du calcul de l'action V à l'aide de la formule (7.14), Hamilton trouva l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre pour laquelle l'action V est une intégrale complète.

Conformément à la forme générale de la fonction d'action $V = V(t, q_1, \ldots, q_k, q_1^0, \ldots, q_k^0)$ et à la formule (7.14) on peut écrire

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} = T + U,$$

et en utilisant (7.15) et (7.12) on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0. \tag{7.16}$$

C'est l'*équation de Hamilton-Jacobi.*

180. Jacobi compléta les recherches de Hamilton et montra qu'il suffisait de connaître n'importe quelle intégrale complète $V(t, q_1, \ldots, q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de (7.16) dépendant des constantes α_s dont aucune n'est additive *) pour obtenir la solution générale des équations canoniques (7.13) sous la forme

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}, \quad \beta_s = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} \quad (s = 1, \ldots, k), \tag{7.17}$$

où les β_s sont de nouvelles constantes.

La démonstration de ce théorème de Jacobi est donnée dans les cours du calcul des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre.

181. Dans de nombreux problèmes de dynamique le calcul de l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi se trouve simplifié en utilisant la substitution d'Imchénetski **). Etant donné une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi\left(\psi\left(x_1, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right), x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

---

*) L'intégrale complète de l'équation (7.16) est une solution de la forme $V(t, q_1, \ldots, q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des constantes arbitraires avec

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, k).$$

**) V. Imchénetski. *Cours d'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Kazan', 1865 (en russe).

son intégrale complète est

$$z(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) + w(x_2, \ldots, x_n),$$

où f est l'intégrale de l'équation

$$\psi\left(x_1, \frac{df}{dx_1}\right) = \alpha_1$$

(α_1 est une constante) et w l'intégrale complète de l'équation

$$\Phi\left(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Exemple. Si les liaisons ne dépendent pas explicitement du temps, la fonction H ne dépendra pas, elle non plus, explicitement de t et l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0$$

admettra la substitution $\dfrac{df}{dt} = -h$ ou $f = -h(t - t_0)$; h est une constante. L'intégrale complète V sera de la forme

$$V = -h(t - t_0) + W(q_1, \ldots, q_k),$$

où W désigne l'intégrale complète de l'équation de Hamilton

$$H\left(q_1, \ldots, q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h. \qquad (7.18)$$

Exemple. Si la fonction de Hamilton ne dépend pas explicitement de q_1, l'intégrale V de l'équation (7.16) sera de la forme

$$V = f(q_1, \alpha_1) + W(t, q_2, \ldots, q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) ;$$

une substitution convenable fournit l'une des intégrales du mouvement

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{df}{dq_1} = \alpha_1.$$

La coordonnée q_1 est dite *cyclique*.

Exemple. Posons que la force vive T et la fonction de force U soient de la forme

$$2T = (A_1 + \ldots + A_k)(B_1 q_1'^2 + \ldots + B_k q_k'^2), \quad U = \frac{U_1 + \ldots + U_k}{A_1 + \ldots + A_k},$$

où les fonctions A_s, B_s, U_s sont des fonctions d'une même variable q_s. Après passage aux impulsions p_s, l'équation de Hamilton (7.18) s'écrira sous la forme

$$\sum_s \left[\frac{1}{2B_s} \left(\frac{\partial W}{\partial q_s} \right)^2 - hA_s - U_s \right] = 0.$$

Les variables sont complètement séparées. L'intégrale complète W est égale à

$$W = \sum_s V_s,$$

où V_s, qui est une fonction d'une seule variable q_s, se laisse déterminer en intégrant l'équation

$$\frac{1}{2B_s} \left(\frac{dV_s}{dq_s} \right)^2 - hA_s - U_s = \alpha_s \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Les constantes α_s sont liées par une seule relation

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0.$$

L'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi, qui résout notre problème, est égale à

$$V = -h(t - t_0) + W = -h(t - t_0) + \sum_s \int \sqrt{2B_s(hA_s + U_s + \alpha_s)}dq_s.$$

Ce cas a été démontré par Liouville.

Exemple. Etudions le problème du mouvement d'une planète, conforme aux lois de Kepler, en supposant que le Soleil est fixe et situé à l'origine des coordonnées. En coordonnées sphériques r, θ, φ l'équation de Hamilton (7.18) se présente sous la forme

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - \frac{2m\mu}{r} = h.$$

Les trois substitutions intégrables successives sont évidentes :

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_1, \quad \left(\frac{dV_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta} = \alpha_2, \quad \left(\frac{dV_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_2}{r^2} - \frac{2m\mu}{r} = h.$$

L'intégrale complète de l'équation (7.16) s'écrira donc

$$V = -h(t - t_0) + V_r + V_\theta + V_\varphi$$

avec

$$V_r = \int \sqrt{2h + \frac{2m\mu}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}dr, \quad V_\theta = \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}d\theta,$$

$$V_\varphi = \alpha_1 \varphi.$$

182. La question de l'intégration des équations de la mécanique ne fait pas l'objet d'une analyse poussée dans un cours non spécialisé. Nous recommandons à tous ceux que cette question intéresse de consulter le « Cours de dynamique » de Jacobi et le cours de « Dynamique analytique » de Whittaker *).

183. Lorsqu'un point matériel de masse m effectue un mouvement relatif, il se trouve soumis à la force de Coriolis. En notant x', y', z' les projections de la vitesse relative du point m sur les axes de coordonnées mobiles tournant avec les vitesses angulaires p, q, r autour des axes fixes, les composantes de la force de Coriolis sont données par la matrice

$$-2m \left\| \begin{matrix} p & q & r \\ x' & y' & z' \end{matrix} \right\|.$$

Une force analogue apparaît lorsqu'un électron se déplace dans un champ magnétique (H_1, H_2, H_3) :

$$e \left\| \begin{matrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{matrix} \right\|,$$

e étant la charge de l'électron ; la vitesse de la lumière est prise pour l'unité.

Dans son mouvement relatif le point m est absolument libre et le principe de Hamilton est valable. On peut donc appliquer le principe de Hamilton au cas du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique.

Posons $T = \frac{m}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$, où m est la masse de l'électron, et

$$L = T - e\varphi + e(A_1 x_1' + A_2 x_2' + A_3 x_3').$$

Le principe variationnel

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0,$$

lorsque les bornes sont fixées, fournit en qualité d'équations d'Euler-Lagrange les équations différentielles du mouvement de l'électron

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

*) C.G.J. Jacobi. *Vorlesungen über Dynamik*. Berlin, 1984 ; E. Whittaker. *A treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies*. Cambridge University Press, Cambridge, 1937.

Les forces électriques F_1, F_2, F_3 et magnétiques H_1, H_2, H_3 s'exerçant sur l'électron sont déterminées par les quantités φ, A_1, A_2, A_3 d'après les formules

$$F_i = -e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

et

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{Vmatrix}.$$

Les fonctions φ et (A_1, A_2, A_3) sont appelées respectivement *potentiel scalaire* et *potentiel vectoriel*. A la place des impulsions ordinaires $p_i = \partial T/\partial x_i'$ on introduit les impulsions généralisées P_i définies par les formules

$$P_i = p_i + eA_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad P_i = \frac{\partial L}{\partial x_i'}.$$

Le principe de Hamilton donne

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum P_i x_i' - H)dt = 0,$$

où

$$H = \sum P_i x_i' - L.$$

De cette forme du principe de Hamilton découlent directement les équations canoniques du mouvement de l'électron dans un champ électromagnétique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

La forme explicite de la fonction H est la suivante :

$$H = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial x_i'} + eA_i\right) x_i' - T + e\varphi - e\sum A_i x_i' =$$

$$T + e\varphi = \frac{1}{2m}\sum (P_i - eA_i)^2 + e\varphi.$$

On en déduit aussitôt l'équation de Hamilton-Jacobi.

§ 5. Principe de Gauss

184. Gauss énonça un principe de mécanique de grande importance – le principe de la moindre contrainte.

Si à un instant t un système matériel occupe une position bien déterminée où on peut attribuer aux points m_ν des valeurs déterminées des coordonnées x_ν, y_ν, z_ν et des vitesses x'_ν, y'_ν, z'_ν, les différentes forces agissant sur le système soumis à des liaisons déterminent, au cours d'un petit intervalle de temps dt, de petites variations des vitesses dx'_ν, dy'_ν, dz'_ν. Gauss énonça un principe qui permet de séparer les mouvements réels déterminés par les forces appliquées sur le système et les mouvements imaginaires qui s'effectueraient avec les mêmes valeurs de x_ν, y_ν, z_ν, x'_ν, y'_ν, z'_ν (à un instant t) et avec les mêmes liaisons mais sous l'action d'autres forces.

Notons dx'_ν, dy'_ν, dz'_ν les variations de la vitesse du point m au cours d'un intervalle de temps dt dans le cas du mouvement réel et $\delta x'_\nu$, $\delta y'_\nu$, $\delta z'_\nu$ dans le cas d'un mouvement imaginaire. Posons pour simplifier que les liaisons sont holonomes :

$$f(t,\ x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu) = 0 \quad (s = 1,\ \ldots,\ m).$$

En différentiant deux fois par rapport au temps t on trouve pour les mouvements réel et imaginaire les relations suivantes :

$$\sum_\nu \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_\nu} dx'_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial y_\nu} dy'_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial z_\nu} dz'_\nu \right) + A_s dt = 0,$$

$$\sum_\nu \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_\nu} \delta x'_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial y_\nu} \delta y'_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial z_\nu} \delta z'_\nu \right) + A_s dt = 0,$$

où les expressions de A_s ne dépendent que du temps t, des coordonnées x_ν, y_ν, z_ν et des vitesses x'_ν, y'_ν, z'_ν qui pour un grand nombre de mouvements imaginaires sont, selon Gauss, des quantités constantes à un instant t donné. En retranchant la seconde relation de la première on obtient

$$\sum_\nu \left[\frac{\partial f_s}{\partial x_\nu} (dx'_\nu - \delta x'_\nu) + \frac{\partial f_s}{\partial y_\nu} (dy'_\nu - \delta y'_\nu) + \frac{\partial f_s}{\partial z_\nu} (dz'_\nu - \delta z'_\nu) \right] = 0 \quad (s = 1,\ \ldots,\ m).$$

Cela signifie que les différences $dx'_\nu - \delta x'_\nu$, $dy'_\nu - \delta y'_\nu$ et $dz'_\nu - \delta z'_\nu$ font partie des déplacements virtuels. Appliquons le principe d'Euler-Lagrange :

$$\sum_\nu [(m_\nu dx'_\nu - X_\nu dt)(dx'_\nu - \delta x'_\nu) + (m_\nu dy'_\nu - Y_\nu dt)(dy'_\nu - \delta y'_\nu) + (m_\nu dz'_\nu - Z_\nu dt)(dz'_\nu - \delta z'_\nu)] = 0.$$

Libérons le système matériel d'une partie de ses liaisons en rejetant une partie des fonctions f_s. Notons $\partial x'_\nu$, $\partial y'_\nu$, $\partial z'_\nu$ les variations réelles des vitesses des points m_ν du système libéré soumis à l'action des mêmes forces extérieures et possédant à l'instant t les mêmes coordonnées et les mêmes vitesses qu'auparavant. Les déplacements virtuels correspondant à la totalité des liaisons subsisteront forcément pour le système libéré. Par conséquent, l'application du principe d'Euler-Lagrange au mouvement réel libéré fournit le résultat suivant :

$$\sum_\nu [(m_\nu \partial x'_\nu - X_\nu dt)(dx'_\nu - \delta x'_\nu) + (m_\nu \partial y'_\nu - Y_\nu dt)(dy'_\nu - \delta y'_\nu) + (m_\nu \partial z'_\nu - Z_\nu dt)(dz'_\nu - \delta z'_\nu)] = 0.$$

En retranchant cette relation de la relation précédente on trouve

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\delta\partial} = 0, \tag{7.19}$$

où

$$A_{d\delta} = \sum_\nu m_\nu [(dx'_\nu - \delta x'_\nu)^2 + (dy'_\nu - \delta y'_\nu)^2 + (dz'_\nu - \delta z'_\nu)^2]$$

exprime le degré de déviation (de contrainte) du mouvement (d) par rapport au mouvement (δ). On écrit de façon analogue les expressions de $A_{d\partial}$ et $A_{\delta\partial}$.

185. La relation (7.19) permet d'établir deux inégalités fondamentales :

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}$$

qui exprime que la déviation du mouvement imaginaire (δ) du système par rapport au mouvement réel (d) est toujours inférieure à son déviation par rapport au mouvement réel libéré (∂) ;

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial} \text{ *)}$$

qui exprime que la déviation du mouvement réel (d) par rapport au mouvement réel libéré (∂) est inférieure à la déviation de n'importe quel mouvement imaginaire (δ) par rapport au mouvement réel libéré (∂) (inégalité de Mach).

186. Si on débarrasse le système de toutes les liaisons, la dernière inégalité ci-dessus exprimera le principe de la moindre contrainte de Gauss : l'expression ($A\ dt^2 = A_{d\partial}$)

$$A = \sum m_\nu \left[\left(x''_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu} \right)^2 + \left(y''_\nu - \frac{Y_\nu}{m_\nu} \right)^2 + \left(z''_\nu - \frac{Z_\nu}{m_\nu} \right)^2 \right] \tag{7.20}$$

---

*) Cette inégalité a été rigoureusement justifiée par E. Bolotov (Izv. phys-math. ob., Université de Kazan', série 2, 1916, T. 21, n° 3).

possède la plus petite valeur possible assurant un mouvement réel *). Un procédé en tout point analogue permet de formuler le principe de Gauss pour des liaisons linéaires non holonomes.

187. On déduit aisément du principe de Gauss les équations d'Appell.

Notons $q_1, \ldots, q_k$ $(k = 3n - m)$ les coordonnées indépendantes du système matériel. L'ensemble des mouvements imaginaires de Gauss est donné par

$$A = A(q_1'', \ldots, q_k'').$$

La condition pour que A prenne une valeur extrémale à la suite de la variation des seuls q_s'' s'écrit simplement :

$$\frac{\partial A}{\partial q_s''} = 0 \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Ce sont les équations d'Appell. Si on utilise la notion d'énergie d'accélération

$$S = \sum \frac{m_\nu}{2}\left(x_\nu''^2 + y_\nu''^2 + z_\nu''^2\right),$$

on peut mettre les équations d'Appell sous la forme **)

$$\frac{\partial S}{\partial q_s''} = Q_s \quad (s = 1, \ldots, k).$$

On notera que l'on peut généraliser les équations d'Appell à l'inégalité de Mach si on connaît le mouvement libéré réel (∂) *).

Dans le cas des liaisons linéaires holonomes et non holonomes le principe de Gauss est aussi général que le principe d'Euler-Lagrange.

---

*) Démonstration selon De la Vallée Poussin :

$$\delta x_\nu = \frac{dt^2}{2}\delta x_\nu'', \quad \delta A = 0, \quad \delta^2 A > 0.$$

**) $$Q_s = \sum\left(X_\nu \frac{\partial x_\nu''}{\partial q_s''} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu''}{\partial q_s''} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu''}{\partial q_s''}\right).$$

Si les liaisons sont holonomes,

$$\frac{\partial x_\nu''}{\partial q_s''} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y_\nu''}{\partial q_s''} = \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z_\nu''}{\partial q_s''} = \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}$$

et Q_s s'écrit sous la forme usuelle

$$Q_s = \sum\left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right).$$

***) La généralisation des équations d'Appell est $\partial A_{d\partial}/\partial(dq_s') = 0$.

§ 6. Principe de la moindre action

188. Lorsqu'un système mécanique soumis aux contraintes imposées par des liaisons holonomes lisses se trouve soumis à l'action des forces conservatives et si les déplacements réels du système font partie des déplacements virtuels (les liaisons ne dépendant pas du temps), on peut définir l'intégrale des forces vives

$$T - U = h.$$

Le système abandonné à lui-même peut choisir son mouvement parmi les mouvements possédant une réserve d'énergie totale h. Cela permet de réduire la multitude de trajectoires comparables et de considérer la loi des forces vives comme une condition. On cherchera alors le principe de la mécanique sous la forme d'un principe variationnel conditionnel.

Ce problème a été résolu par Lagrange.

Si les liaisons sont lisses, holonomes et indépendantes du temps, si on peut définir l'intégrale des forces vives $T - U = h$ dans le cas de forces conservatives dérivant d'une fonction de force U et si les positions finales du système x_ν^0, y_ν^0, z_ν^0 et x_ν^1, y_ν^1, z_ν^1 et l'instant initial t_0 sont donnés, on peut écrire l'égalité

$$\delta \int_{t_0}^{t} T\, dt = 0.$$

Ecrivons pour ce problème variationnel conditionnel la fonction de Lagrange affectée du multiplicateur λ :

$$F = T + \lambda(T - U - h).$$

La condition de l'extrémité glissante de la borne supérieure

$$F - \sum_s q_s' \frac{\partial F}{\partial q_s'} = 0$$

permet d'écrire

$$T + \lambda(T - U - h) - (1 + \lambda) \sum_s q_s' \frac{\partial T}{\partial q_s'} = -(1 + 2\lambda)\, T = 0,$$

soit $\lambda = -1/2$.

Les équations d'Euler

$$\frac{d}{dt}\left[(1 + \lambda)\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right] - (1 + \lambda)\frac{\partial T}{\partial q_s} + \lambda \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0$$

pour la valeur donnée de λ fournissent les équations de Lagrange de second

ordre décrivant le mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

189. Pour ce même cas Jacobi a formulé un principe géométrique digne d'intérêt. Posons que la force vive du système soit égale à

$$2T = \sum_{i,j} a_{ij} q_i' q_j' ;$$

considérons un espace de configurations défini par l'élément linéaire :

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij} dq_i dq_j .$$

Supposons connues les positions finales P_0 et P_1 du système. Pour les forces et les liaisons considérées la trajectoire réelle doit vérifier le principe de Jacobi

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)}\, ds = 0. \tag{7.21}$$

Supposons en effet que λ soit une fonction des coordonnées q_s. Cette fonction définit une famille de surfaces $\lambda(q_1, \ldots, q_k) = c$ interceptant la trajectoire cherchée du système, ainsi que toutes les autres lignes infiniment proches de la trajectoire et passant par les points P_0 et P_1 (fig. 147). Dans ce cas on peut considérer què chacune de ces lignes est décrite par ses coordonnées exprimées sous la forme de fonctions de λ. Posons que la lettre δ indique le passage d'un point de la trajectoire cherchée vers le point du chemin voisin qui se rapporte au même λ. Dans ces conditions on peut remplacer (7.21) par une expression du problème variationnel à limites λ_0 et λ_1 fixées et à bornes P_0, P_1 fixées :

$$\delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{2(U+h)}\, \frac{ds}{d\lambda}\, d\lambda = 0.$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent maintenant

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{2(U+h)}\, \frac{\partial \sqrt{\sum_{ij} a_{ij} \frac{dq_i}{d\lambda}\frac{dq_j}{d\lambda}}}{\partial (dq_s/d\lambda)}\right] -$$

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\sum_{ij} a_{ij}\frac{dq_i}{d\lambda}\frac{dq_j}{d\lambda}}\right) = 0. \tag{7.22}$$

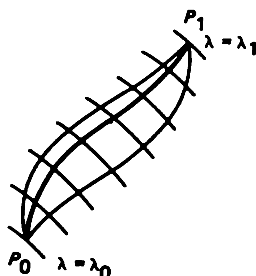


Fig. 147

Si sur la trajectoire considérée dt n'est pas égal à zéro, on peut utiliser en qualité de paramètre λ le temps t mesuré sur la trajectoire à laquelle s'applique la loi de la force vive

$$\sum_{ij} a_{ij} q_i' q_j' = 2(U + h).$$

Dans ces conditions les équations (7.22) se ramènent aux équations du mouvement de Lagrange de second orde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

ce qui démontre le principe de Jacobi.

Le principe de Jacobi présente un caractère géométrique mais ne fournit aucune réponse à la question du lien qui existe entre la signification attribuée à δ correspondant au cas où le temps t est mesuré sur la trajectoire cherchée et les déplacements virtuels du système mécanique soumis à l'obligation de satisfaire à la loi $T = U + h$ lorsque le temps est mesuré de façon indépendante.

Dans les problèmes de mécanique on ne peut fixer à l'avance les valeurs de t_0, t_1, P_0, P_1 et h et dans l'interprétation mécanique de δ impliquant la notion de déplacement virtuel du système lorsque $T = U + h$, le principe de Jacobi doit se présenter sous une forme analogue à celle du principe de Lagrange.

190. Les équations de Lagrange de seconde espèce constituent les conditions nécessaires à l'existence des extrémums des principes variationnels de la dynamique.

Selon le calcul variationnel les conditions suffisantes pour que l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x_i, x_i')dt$$

prenne sa valeur minimale sont au nombre de deux.

1° La fonction de ε_i

$$f(x_i, x_i' + \varepsilon_i) - \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i'} - f(x_i, x_i')$$

doit être minimale lorsque $\varepsilon_i \to 0$.

2° La première condition ne sera pas suffisante pour que l'intégrale soit minimale si les limites t_0 et t_1 ne sont pas aussi proches que l'on veut l'une de l'autre. Dans le cas général il faut que la condition de Jacobi sur les foyers cinétiques soit satisfaite *).

191. Vérifions la validité de la première condition pour les principes de Hamilton (7.10) et de Jacobi (7.21). En subdivisant la fonction $L = T + U$ en formes L_i homogènes de degré i par rapport aux vitesses q_s', on peut écrire

$$L = L_0 + L_1 + L_2,$$

où L_2 représente une forme quadratique définie positive. On aura ainsi

$$L_1(q_i, q_i' + \varepsilon_i) = L_1(q_i, q_i') + \sum \varepsilon_i \frac{\partial L_1}{\partial q_i'},$$

$$L_2(q_i, q_i' + \varepsilon_i) = L_2(q_i, q_i') + \sum \varepsilon_i \frac{\partial L_2}{\partial q_i'} + L_2(q_i, \varepsilon_i),$$

et par suite

$$L(q_i, q_i' + \varepsilon_i) - \sum \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial q_i'} - L(q_i, q_i') = L_2(q_i, \varepsilon_i) > 0.$$

Pour le principe de Hamilton la première condition est toujours vérifiée, ce qui signifie qu'il traite effectivement du minimum d'action.

Démontrons que cette première condition vaut également pour le principe de Jacobi. Dans ce principe, lorsque le temps est mesuré le long de la trajectoire cherchée, seul le facteur $\sqrt{2T(q_i, q_i')}$ dépend des vitesses q_s'. Le développement en série de $\sqrt{2T(q_i, q_i' + \varepsilon)}$ suivant ε_i est réalisé en développant suivant u l'expression $\sqrt{2T(q_i, q_i' + \varepsilon_i u)}$, après quoi on pose $u = 1$. Posons

$$2T(q_i, q_i' + \varepsilon_i u) = au^2 + 2bu + c;$$

*) E. Whittaker. *A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge, 1937.

vu que la force vive est définie positive, on aura

$$ac - b^2 > 0.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur du paramètre u,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{2T(q_i, q_i' + \varepsilon_i u)} = \frac{ac - b^2}{(au^2 + 2bu + c)^{3/2}} > 0,$$

la condition 1° est donc vérifiée et le principe de Jacobi concerne bien un minimum.

§ 7. Transformations canoniques

192. Les transformations canoniques des équations de Hamilton découlent du principe de la moindre action

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum p_s dq_s - H\, dt \right) = 0.$$

Utilisons à la place des variables q_s, p_s les nouvelles variables Q_s, P_s vérifiant la relation

$$\sum p_s \delta q_s = \sum P_s \delta Q_s + \delta W, \tag{7.23}$$

où $W(t, q_s, Q_s)$ est une fonction différentiable appelée *fonction caractéristique* de la transformation *). Avec ces nouvelles variables le principe de la moindre action s'écrit sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum P_s dQ_s - \left(H + \frac{\partial W}{\partial t} \right) dt \right] + \delta \int_{t_0}^{t} dW = 0.$$

Comme la variation de la dernière intégrale y est égale à zéro, avec les nouvelles variables Q_s, P_s les équations différentielles du mouvement se présentent aussi sous une forme canonique ; le rôle de la nouvelle fonction de Hamilton est assumé par

$$H^* = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Les transformations qui vérifient la relation (7.23) sont dites *canoniques* ou *de contact* :

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial q_s}, \quad - P_s = \frac{\partial W}{\partial Q_s}. \tag{7.24}$$

---

*) De nos jours cette fonction porte le nom de fonction génératrice de la transformation canonique.

193. Posons que $V(t, q_s, q_s^0)$ désigne l'action ; on sait que

$$\delta V = \sum p_s \delta q_s - \sum p_s^0 \delta q_s^0.$$

En identifiant cette relation avec la formule (7.23) on peut affirmer que les valeurs q_s^0, p_s^0 que les variables q_s et p_s prennent à l'instant initial et celles qu'elles prennent à l'instant t sont liées entre elles par une transformation canonique dans laquelle le rôle de fonction caractéristique W est assumé par l'action V.

Comme les instants t_0 et t peuvent être choisis arbitrairement, on peut assimiler le mouvement d'un système mécanique holonome conservatif à une succession de transformations canoniques de variables q_s, p_s.

194. Si la fonction caractéristique $W(t, q_s, Q_s)$ vérifie la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0, \tag{7.25}$$

la nouvelle fonction H^* est égale à zéro et les équations canoniques en variables P_s, Q_s seront de la forme

$$\frac{dP_s}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_s}{dt} = 0,$$

ce qui signifie que P_s et Q_s sont des constantes. Les formules de transformation (7.24) réduisent la relation (7.25) à l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi (7.16) et confèrent à la fonction caractéristique $W(t, q_s, Q_s)$ le sens d'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi tandis que les équations (7.24) expriment le théorème connu de Jacobi (7.17).

195. Considérons une transformation canonique infinitésimale. Les nouvelles variables diffèrent peu des variables initiales :

$$P_s = p_s + \Delta p_s, \quad Q_s = q_s + \Delta q_s.$$

Soient

$$\Delta q_s = u_s(t, q_j, p_j)\Delta t, \quad \Delta p_s = v_s(t, q_j, p_j)\Delta t.$$

L'application de la condition (7.23) de la transformation canonique fournit le résultat suivant :

$$\sum [p_s \delta q_s - (p_s + \Delta p_s)\delta(q_s + \Delta q_s)] = \delta W,$$

ou aux quantités du plus petit ordre de petitesse près

$$\Delta t \sum (v_s \delta q_s + p_s \delta u_s) = -\delta W.$$

En posant $\delta W = \Delta t \; \delta U$ on aura

$$\sum (v_s \delta q_s - u_s \delta p_s) = -\delta(U + \sum p_s u_s) = -\delta H.$$

En identifiant les coefficients auprès des mêmes variations indépendantes δq_s, δp_s on obtient

$$\frac{\Delta p_s}{\Delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \frac{\Delta q_s}{\Delta t} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

A la limite $\Delta t \to 0$ ces relations se réduisent aux équations canoniques de Hamilton. Il s'ensuit que ces dernières, appliquées aux systèmes mécaniques soumis à des liaisons holonomes et à l'action de forces dérivant d'une fonction de force, démontrent que tout mouvement est une succession continue dans le temps de transformations canoniques infinitésimales des variables q_s et p_s.

196. On appelle *covariant bilinéaire* de la forme linéaire

$$\omega_\delta = \sum X_\nu \delta x_\nu$$

l'expression

$$\Delta\omega_\delta - \delta\omega_\Delta = \sum (\Delta X_\nu \delta x_\nu - \delta X_\nu \Delta x_\nu) = \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} \right) \Delta x_\nu \delta x_\mu .$$

Le covariant bilinéaire d'une différentielle totale est égal à zéro. Le covariant bilinéaire d'une somme de formes linéaires est égal à la somme des covariants bilinéaires des formes linéaires.

197. La forme linéaire (7.23) de la transformation canonique des variables q_s, p_s et Q_s, P_s possède pour covariant bilinéaire l'expression

$$\sum (\Delta p_s \delta q_s - \Delta q_s \delta p_s) = \sum (\Delta P_s \delta Q_s - \Delta Q_s \delta P_s).$$

Autrement dit l'expression $\sum (\Delta p_s \delta q_s - \Delta q_s \delta p_s)$ est un invariant des transformations canoniques.

198. Nous avons montré à l'aide de la fonction d'action $V(t, q_s, q_s^0)$ que les variables q_s^0, p_s^0 et q_s, p_s sont liées entre elles par une transformation canonique. On peut donc écrire

$$\sum_s (\Delta p_s \delta q_s - \Delta q_s \delta p_s) = \sum_s (\Delta p_s^0 \delta q_s^0 - \Delta q_s^0 \delta p_s^0).$$

Posons que δ désigne la mise en mouvement, ce dernier étant caractérisé à l'instant t_0 par les valeurs $q_1^0, \ldots, q_k^0, p_1^0, \ldots, p_{r-1}^0, p_r^0 + \delta p_r^0, \delta p_{r+1}^0, \ldots, p_k^0$, et que Δ désigne une mise en mouvement caractérisé à l'instant t par les valeurs $q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i + \Delta p_i, p_{i+1}, \ldots, p_k$. Appliquant la relation ci-dessus il vient

$$\Delta p_i \delta q_i = -\Delta q_r^0 \delta p_r^0.$$

La variation d'une coordonnée δq_i déterminée par une variation δp_r^0 de l'impulsion au cours d'un intervalle de temps arbitraire est égale et de signe contraire à la variation au cours du même temps dans le mouvement

rétrograde de la coordonnée Δq_i^0 déterminée par une variation égale de l'impulsion Δp_i (Helmholtz).

§ 8. Oscillations des systèmes mécaniques

199. La question des oscillations des systèmes mécaniques fut déjà abordée par Lagrange. Les équations différentielles décrivant les mouvements perturbés résultant de l'action de forces perturbatrices ont été établies par Lagrange par la méthode de la variation de constantes arbitraires. Considérons un système mécanique soumis aux contraintes imposées par des liaisons holonomes parfaites et à des forces dérivant d'une fonction de force ; soient q_s, p_s ses coordonnées et ses impulsions et soit $H_0(t, q_s, p_s)$ la fonction de Hamilton relative au mouvement non perturbé.

Ce système est soumis à l'action de forces perturbatrices dérivant d'une fonction de force W. La fonction de Hamilton pour le mouvement perturbé s'écrira $H = H_0 - W$,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Si on connaît la solution du problème non perturbé

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

ou l'intégrale complète $V(t, q_s, \alpha_s)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi pour les mouvements non perturbés $\frac{\partial V}{\partial t} + H_0\left(t, q_s, \frac{\partial V}{\partial q_s}\right) = 0$, on peut poser le problème suivant : remplacer les constantes α_i, β_i du mouvement non perturbé (H_0) par des fonctions du temps telles qu'en substituant ces fonctions dans les solutions des équations non perturbées

$$q_i = q_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k),$$
$$p_i = p_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k)$$

on obtienne des solutions pour le mouvement perturbé. Ce problème a été résolu par Lagrange. Pour le mouvement perturbé

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_s}\frac{d\alpha_s}{dt} + \sum_s \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s}\frac{d\beta_s}{dt}.$$

Mais pour le mouvement non perturbé on doit avoir

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}.$$

On en tire

$$\sum_s \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_s}\frac{d\alpha_s}{dt} + \sum_s \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s}\frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial p_i},$$

et de même

$$\sum_s \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s}\frac{d\alpha_s}{dt} + \sum_s \frac{\partial p_i}{\partial \beta_s}\frac{d\beta_s}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i}.$$

A l'aide de ces relations ($i = 1, \ldots, k$) on doit déterminer les dérivées $d\alpha_\nu/dt$, $d\beta_\nu/dt$.

Utilisons les parenthèses de Lagrange

$$(a, b) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{\partial p_i}{\partial b} - \frac{\partial q_i}{\partial b}\frac{\partial p_i}{\partial a} \right).$$

En multipliant la première des relations ci-dessus par $\partial p_i/\partial \alpha_\nu$ et la seconde par $-\partial q_i/\partial \beta_\nu$ et en sommant membre à membre et sur tous les i on obtient

$$\sum_s (\alpha_s, \alpha_\nu)\frac{d\alpha_s}{dt} + \sum_s (\beta_s, \alpha_\nu)\frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_\nu}, \tag{7.26}$$

et de même

$$\sum_s (\alpha_s, \beta_\nu)\frac{d\alpha_s}{dt} + \sum_s (\beta_s, \beta_\nu)\frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \beta_\nu}.$$

Pour le mouvement non perturbé les constantes α_ν, β_ν se laissent calculer à l'aide du théorème de Jacobi

$$\beta_\nu = \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}, \quad p_\nu = \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Ces relations permettent d'évaluer les parenthèses de Lagrange ; on trouve ainsi

$$(\alpha_\nu, \beta_s) = \frac{\partial}{\partial \beta_s}\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_\nu} - \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_s}\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_\nu} - \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \beta_s}.$$

Mais comme

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu} = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}\right) + \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu + \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_\nu},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_s} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \beta_s},$$

on obtient

$$(\alpha_\nu, \beta_s) = -\frac{\partial \beta_\nu}{\partial \beta_s}.$$

On démontre de la même façon les relations

$$(\alpha_s, \alpha_\nu) = 0, \quad (\beta_s, \beta_\nu) = 0.$$

En substituant les expressions des parenthèses de Lagrange dans (7.26) on obtient les équations fondamentales de la théorie des perturbations

$$\frac{d\alpha_\nu}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \beta_\nu}, \quad \frac{d\beta_\nu}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, k). \tag{7.27}$$

200. Les équations différentielles du mouvement des systèmes mécaniques holonomes et conservatifs, lorsque ne sont perturbées que les valeurs initiales des coordonnées q_s et des impulsions p_s, ont été établies par Poincaré. Posant que la fonction de Hamilton s'écrit $H(t, q_s, p_s)$:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Pour un mouvement déterminé (prédominant) du système matériel $q_s = q_s(t)$, $p_s = p_s(t)$. Considérons un mouvement proche de ce mouvement prédominant :

$$q_s + \xi_s, \quad p_s + \eta_s.$$

Les écarts des coordonnées ξ_s et des impulsions η_s vérifieront en première approximation le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \sum_\nu \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\nu}\xi_\nu + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\nu}\eta_\nu\right), \\ \frac{d\eta_s}{dt} &= -\sum_\nu \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\nu}\xi_\nu + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\nu}\eta_\nu\right) \quad (s = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{7.28}$$

Ce sont les équations aux variations de Poincaré.

201. Poincaré a énoncé plusieurs propositions fort importantes.

Si ξ_s, η_s et ξ_s', η_s' sont deux solutions particulières des équations aux variations (7.28), on aura

$$I = \sum (\xi_s\eta_s' - \eta_s\xi_s') = \text{const}\ ^*). \tag{7.29}$$

On a en effet

$$\frac{d}{dt}\sum (\xi_s\eta_s' - \eta_s\xi_s') =$$

$$\sum_{s,\nu}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_\nu}\xi_\nu\eta_s' + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_\nu}\eta_s'\eta_\nu - \frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial q_\nu}\xi_\nu'\xi_s - \frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial p_\nu}\eta_\nu'\xi_s\right) +$$

$$\sum_{s,\nu}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial q_\nu}\xi_\nu\xi_s' + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial p_\nu}\eta_\nu\xi_s' - \frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_\nu}\xi_\nu'\eta_s - \frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_\nu}\eta_\nu'\eta_s\right) \equiv 0.$$

On démontre de même que si les équations aux variations de Poincaré possèdent une intégrale linéaire

$$\sum_s (A_s\xi_s + B_s\eta_s) = \text{const},$$

ces équations auront une solution particulière

$$\xi_s = -B_s, \quad \eta_s = A_s.$$

Si $\Phi(t, q_s, p_s) = \text{const}$ est l'intégrale des équations canoniques du mouvement, l'expression suivante

$$\sum_s\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\eta_s\right) = \text{const}$$

représente l'intégrale linéaire des équations aux variations de Poincaré ; il s'ensuit que ces équations admettent une solution particulière

$$\xi_s = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}, \quad \eta_s = \frac{\partial\Phi}{\partial q_s}.$$

Sur ces bases il devient facile de démontrer le théorème connu de Poisson. Si $\Phi = a$ et $\Phi_1 = a_1$ sont les deux intégrales premières des équations canoniques du mouvement, les équations aux variations de Poincaré posséderont des solutions particulières :

$$\xi_s = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}, \quad \eta_s = \frac{\partial\Phi}{\partial q_s}, \quad \xi_s' = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial p_s}, \quad \eta_s' = \frac{\partial\Phi_1}{\partial q_s}.$$

---

*) I est l'invariant de Poincaré.

En utilisant l'invariant de Poincaré on peut écrire

$$(\Phi, \Phi_1) = \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_s} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_s} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_s} \right) = \text{const.}$$

202. Considérons le mouvement d'un système matériel (holonome, conservatif et limité par des liaisons indépendantes du temps) près de sa position d'équilibre.

En qualité d'équations décrivant les mouvements perturbés du système matériel près de sa position d'équilibre on peut utiliser en première approximation les équations aux variations de Poincaré à coefficients constants. Les solutions des équations linéaires à coefficients constants sont de la forme

$$\xi_s = A_s e^{\varkappa t}, \quad \eta_s = B_s e^{\varkappa t}$$

pour chaque exposant caractéristique $\varkappa$.

Quelle que soit la solution ξ_s, η_s, il en existe une autre ξ_s', η_s' d'exposant $\varkappa'$ pour laquelle l'invariant constant de Poincaré sera différent de zéro. L'application de la formule (7.29) à cette solution fournit

$$e^{(\varkappa + \varkappa')t} \sum (A_s B_s' - A_s' B_s) = \text{const} \gtrless 0.$$

Cela signifie que pour chaque exposant $\varkappa$ il existe un autre exposant $\varkappa'$ vérifiant la relation

$$\varkappa + \varkappa' = 0. \qquad (7.30)$$

Si parmi tous les exposants $\varkappa$ il en existe au moins un ayant une partie réelle positive, la solution particulière ξ_s, η_s qui lui correspond croîtra indéfiniment avec le temps et l'équilibre sera donc instable.

Par conséquent, pour que l'équilibre soit stable il faut, selon (7.30), que tous les exposants ou racines caractéristiques $\varkappa$ soient purement imaginaires. Cette proposition implique que les mouvements perturbés seront oscillatoires autour d'une position d'équilibre stable du système matériel.

203. Lagrange démontra un théorème très important : *si dans la position d'équilibre la fonction de force U possède un maximum isolé, cette position d'équilibre sera stable.*

La démonstration la plus simple de ce théorème se fonde sur le théorème général de Liapounov sur la stabilité : *si les équations différentielles décrivant le mouvement perturbé sont telles que l'on peut trouver une fonction V de signe constant dont la dérivée V' serait, en vertu de ces équations, une fonction de signe constant mais opposé à celui de V ou identiquement nulle, le mouvement non perturbé sera stable.* La démonstration de ce théo-

rème est donnée dans l'ouvrage de Liapounov intitulé « Problème général de la stabilité du mouvement ».

Pour le cas qui nous concerne ici les équations complètes décrivant les mouvements perturbés sont les équations canoniques de mouvement impliquant la fonction de Hamilton $H = T - U$. Si dans la position d'équilibre $U = 0$, H représentera une fonction définie positive de q_s et p_s. Néanmoins on aura alors $dH/dt = 0$. Donc, selon le théorème de Liapounov, la position d'équilibre où U possède un maximum isolé sera une position d'équilibre stable. Le problème de l'inversion du théorème de Lagrange est un problème aussi important qu'ardu.

204. Petites oscillations autour de la position d'équilibre. Posons qu'à l'état d'équilibre $q_s = 0$ pour tous les s, $U(0, \ldots, 0) = 0$ et qu'aux quantités du plus petit ordre de petitesse près $2T = \sum a_{ij} q_i' q_j'$ et $2U = \sum b_{ij} q_i q_j$; $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ sont des constantes. Les équations du mouvement autour de la position d'équilibre écrites sous la forme de Lagrange sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, \ldots, k),$$

ou encore

$$\sum_j (a_{sj}\, q_j'' - b_{sj}\, q_j) = 0. \tag{7.31}$$

Les coordonnées $x_\nu = \sum_s \alpha_{\nu s} q_s$ avec lesquelles la force vive et la fonction de force sont de la forme $2T = \sum x_\nu'^2$ et $2U = \sum \lambda_\nu x_\nu^2$ sont dites *normales*. Les équations du mouvement écrites en coordonnées normales x_ν se présentent sous une forme simple :

$$x_\nu'' = \lambda_\nu x_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, k). \tag{7.32}$$

Déterminons λ_ν. Chacune des équations (7.32) est équivalente à une combinaison linéaire des équations (7.31). Multiplions ces dernières par h_s et sommons :

$$\sum_{s,\, j} h_s a_{sj} q_j'' = \sum_{s,\, j} h_s b_{sj} q_j.$$

Supposons que cette relation est équivalente à l'équation

$$x_\nu'' = \lambda_\nu x_\nu$$

ou

$$\sum_j \alpha_{\nu j} q_j'' = \lambda_\nu \sum \alpha_{\nu j} q_j.$$

On en tire

$$\alpha_{\nu j} = \sum_s h_s a_{sj} = \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_s h_s b_{sj},$$

ou en omettant les indices auprès de λ_ν

$$\sum_s (\lambda a_{sj} - b_{sj})h_s = 0 \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{7.33}$$

Pour déterminer les valeurs de λ_ν on dispose maintenant de l'équation

$$\Delta(\lambda) = \|\lambda a_{sj} - b_{sj}\| = 0.$$

Toutes les racines de cette équation sont réelles (conformément au théorème de Sylvester). Si λ est une de ces racines, il existe des constantes h_s différentes de zéro et vérifiant l'équation (7.33) :

$$\lambda \sum_s a_{sj}h_s = \sum_s b_{sj}h_s.$$

Multiplions ces équations par $\bar{h}_j$ et sommons :

$$\lambda = \frac{\sum b_{sj}h_s\bar{h}_j}{\sum a_{sj}h_s\bar{h}_j}.$$

Si λ est une quantité complexe, la valeur $\bar{\lambda}$ qui lui est conjuguée ($a_{sj} = a_{js}$, $b_{sj} = b_{js}$) sera égale à

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum b_{sj}\,\bar{h}_s\,h_j}{\sum a_{sj}\,\bar{h}_s\,h_j} = \lambda.$$

Nous avons prouvé ainsi que λ_ν est réel.

Deux cas sont à considérer.

1° Tous les λ_s sont négatifs. Pour $\nu_s = \sqrt{-\lambda_s}$ les solutions de (7.32) seront

$$x_s = A_s \cos(\nu_s t - \varphi_s) \quad (s = 1, \ldots, k),$$

où A_s est l'amplitude, ν_s la fréquence propre, φ_s la phase de la s-ième oscillation propre du système. Si les écarts initiaux sont petits, le système s'écarte peu de sa position d'équilibre et il est stable.

2° Certaines racines λ_s sont positives. Les coordonnées normales et les vitesses correspondant à ces racines peuvent croître indéfiniment au cours du temps. L'équilibre est instable. Si $\lambda_1 > 0$,

$$x_1 = Ae^{t\sqrt{\lambda_1}} + Be^{-t\sqrt{\lambda_1}}.$$

Le nombre de λ_s positifs est appelé *degré d'instabilité du système.*

205. Lorsque la position d'équilibre est stable, tous les λ_s sont négatifs et $2U$ est une forme quadratique définie négative. L'utilisation des coordonnées normales laisse apparaître nettement que le plus grand λ_s (numériquement le plus petit) représente le maximum de la fonction $2U$ lorsque les variables doivent satisfaire à la condition $\sum x_\nu^2 = 1$ (ou à la condition

$2T = 1$ lorsque dans l'expression de T les variables x'_ν sont remplacées par x_ν).

Lorsque l'inertie augmente, le ton fondamental (fréquence la plus faible) baisse ou tout au moins ne croît pas. On entend par augmentation d'inertie la transition à un système dont la force vive T' est telle que $T' - T$ ne devient jamais négatif même si la fonction de force reste invariable.

Lorsque la rigidité du système augmente, le ton fondamental s'élève ou tout au moins ne diminue pas. On entend par augmentation de la rigidité la transition à un système de même force vive dont la fonction de force provient de celle qui a été donnée en lui ajoutant une forme quadratique négative de signe constant.

206. Supposons que l'on impose au système matériel une nouvelle liaison à proximité de la position d'équilibre $x_\nu = 0$. Posons que cette liaison se présente en première approximation pour x_ν petits sous la forme

$$\sum_\nu A_\nu x_\nu = 0 \text{ ou } \sum_\nu A_\nu \delta x_\nu = 0 \quad (A_\nu \text{ sont des constantes}).$$

En vertu du principe de Hamilton

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum (x''_\nu - \lambda_\nu x_\nu)\delta x_\nu dt = 0.$$

En utilisant le principe des multiplicateurs indéterminés de Lagrange on en déduit les équations du mouvement

$$x''_\nu - \lambda_\nu x_\nu - \mu A_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Posons que l'oscillation normale du système modifié est

$$x_\nu = \alpha_\nu e^{\sqrt{\lambda}t}, \quad \mu = me^{\sqrt{\lambda}t}.$$

Par suite

$$\alpha_\nu(\lambda - \lambda_\nu) - mA_\nu = 0.$$

Les équations des liaisons donnent $\sum A_\nu \alpha_\nu = 0$, soit

$$\sum_\nu \frac{A_\nu^2}{\lambda - \lambda_\nu} = 0.$$

Cette équation détermine $k - 1$ valeurs de λ qui sont comprises entre les quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

207. Supposons que le système est soumis à deux types de forces : les forces dérivant d'une fonction de force U et les forces dissipatives qui peuvent produire sur un déplacement virtuel un travail donné par la formule

$$-\sum_\nu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} \delta x_\nu,$$

où $2f = \sum c_{\mu\nu} x'_\mu x'_\nu$ est une forme quadratique positive de x'_ν de signe constant ; $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ sont des constantes.

Bien souvent les forces dissipatives ont pour origine la viscosité. Les équations de Lagrange en coordonnées normales x_ν s'écrivent sous la forme

$$x''_\nu = \lambda_\nu x_\nu - \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, k). \tag{7.34}$$

Multiplions les équations de mouvement (7.34) par x'_ν et sommons :

$$\frac{d(T-U)}{dt} = -2f.$$

Par conséquent, si la position d'équilibre $x_\nu = 0$ était stable en l'absence des forces dissipatives, elle restera stable en leur présence. En présence des forces dissipatives l'énergie totale $H = T - U$ se dissipe avec la vitesse $2f$; f est la fonction de dissipation de Rayleigh. Si f dépend explicitement de tous les x'_ν, la dissipation est dite totale, sinon elle est incomplète.

208. Adjoignons aux forces conservatives et dissipatives des forces X_ν ;

$$x''_\nu = \lambda_\nu x_\nu - \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} + X_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Les forces X_ν sont dites *gyroscopiques* si le travail qu'elles produisent sur un déplacement réel est égal à zéro : $\sum X_\nu dx_\nu = 0$. Par conséquent

$$\frac{d(T-U)}{dt} = -2f.$$

Si l'équilibre était stable sous l'action des seules forces conservatives, il restera stable si on fait encore agir des forces dissipatives et gyroscopiques.

209. Dans certaines conditions, la mise en action des seules forces gyroscopiques transforme un équilibre instable en un équilibre stable, ce que l'on appelle une stabilisation gyroscopique : $x''_\nu = \lambda_\nu x_\nu + \sum g_{\nu\mu} x'_\nu$, $g_{\mu\nu} = -g_{\nu\mu}$. Les racines caractéristiques x sont déterminées par l'équation

$$F(x) = \| \delta_{\mu\nu}(x^2 - \lambda_\nu) + x g_{\mu\nu} \| = 0.$$

Il s'ensuit que $F(+\infty) > 0$ et $F(0) = (-\lambda_1) \ldots (-\lambda_k)$. Si l'instabilité initiale était de degré impair et $|\lambda_\nu| > 0$, $F(0) < 0$ et on doit avoir au moins une racine positive x. L'équilibre reste donc instable. L'instabilité initiale doit être de degré pair pour que la stabilisation gyroscopique soit possible.

Un exemple prouve l'existence de la stabilisation gyroscopique :

$$x'' = \alpha x + g y', \quad y'' = \beta y - g x' \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$
$$(g^2 - \alpha - \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0, \quad g^2 - \alpha - \beta > 0.$$

210. On appelle *nombre caractéristique de Liapounov* d'une fonction z un nombre réel λ tel que la fonction $ze^{(\lambda + \varepsilon)t}$ est non bornée pour tout nombre constant positif ε, et évanescente si ε est un nombre constant négatif.

Le nombre caractéristique d'une somme de deux fonctions est égal au plus petit des nombres caractéristiques de·ces deux fonctions lorsque ces nombres sont différents et ne leur est pas inférieur lorsque ces nombres sont égaux. Le nombre caractéristique du produit de deux fonctions ne peut être inférieur à la somme de leurs nombres caractéristiques.

211. Pour le mouvement non perturbé les coefficients figurant dans les équations aux variations de Poincaré dépendent du temps. Le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions constituant une solution particulière ξ_s, η_s des équations aux variations de Poincaré est appelé *nombre caractéristique* de cette solution. Soit x ce nombre et soit x' le nombre caractéristique d'une autre solution ξ_s', η_s' pour laquelle l'invariant est différent de zéro :

$$\sum (\xi_s\eta_s' - \xi_s'\eta_s) = \text{const} \gtreqless 0.$$

On en déduit $x + x' \leqslant 0$.

Lorsque tous les x sont positifs, les solutions des équations aux variations déterminent la stabilité, et si au moins un des nombres caractéristiques est négatif, les solutions de ces mêmes équations indiquent l'instabilité. La dernière inégalité montre que pour que le mouvement non perturbé soit stable d'après les équations aux variations de Poincaré il faut que tous les nombres caractéristiques x soient égaux à zéro. Dans le cas d'équations aux variations réductibles de Poincaré, la proposition précédente sous-entend que les mouvements perturbés voisins du mouvement non perturbé stable présentent un caractère oscillatoire. Le problème de la détermination de la fréquence des oscillations normales n'est pas encore résolu.

212. Pour un système conservatif holonome les mouvements perturbés proches du mouvement non perturbé sont décrits par différentes valeurs des constantes α_s, β_s de l'intégrale complète de Jacobi $V(t, q_s, \alpha_s)$.

Soit $T = 1/2 \sum g_{ij}p_ip_j$. Supposons que les perturbations résultent de la variation des seules constantes β_s. On a

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \xi_j.$$

Le premier groupe des équations aux variations de Poincaré conduit directement à des équations telles que

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{s,\ j} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Ces équations ne dépendent que de ξ_s (on peut trouver sans difficulté l'équation analogue correspondant à la forme générale de T). Si ces dernières équations sont régulières *) et si le mouvement est stable lors de la perturbation des seules constantes β_s, le nombre caractéristique de l'expression

$$\exp \int \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) dt$$

doit être égal à zéro en vertu du théorème d'Abel.

Les processus oscillatoires dont on aura besoin pour développer les analogies entre l'optique et la mécanique résultent de la perturbation d'équilibre ou de mouvements stables. Une étude plus poussée de cette question dépasse le cadre de ce cours.

§ 9. Stabilité

213. Les oscillations des systèmes mécaniques se produisent autour d'une position d'équilibre stable ou près des mouvements stables. Outre ce fait important, pour établir des analogies entre l'optique et la mécanique, la stabilité présente une importance propre bien plus profonde.

Lorsque l'on décrit un mouvement donné d'un système mécanique à l'aide des principes de la dynamique analytique exposés plus haut, on est amené à toucher le problème des liaisons imposées au système et celui des forces agissantes. De toutes les hypothèses concernant les liaisons et les forces appliquées sur le système on considérera comme réelle l'hypothèse qui permet de déduire des équations de la mécanique relatives aux grandeurs observables F_s les valeurs théoriques f_s qui s'écartent des valeurs empiriques de ces grandeurs φ_s d'une quantité inférieure aux erreurs éventuelles expérimentales ε :

$$|f_s - \varphi_s| < \varepsilon. \tag{7.35}$$

La faiblesse des écarts entre théorie et expérience est la condition *sine qua non* des connaissances scientifiques.

214. En exigeant que les écarts entre théorie et expérience soient petits on rend possible l'établissement d'une proposition générale de grande importance pratique concernant le principe de stabilité.

Imaginons un système holonome soumis à l'action de forces conservatives. Soit q_i ses coordonnées de Lagrange. Supposons que l'hypothèse con-

---

*) Un système d'équations différentielles linéaires $\frac{dx_s}{dt} = \sum p_{sr}x_r$ est dit *régulier* s'il vérifie l'égalité $s + \mu = 0$, où s est la somme des nombres caractéristiques des solutions pour le système normal et μ le nombre caractéristique de la fonction $\exp - \int \sum p_{ss}dt$.

cernant les liaisons conduisant à une expression de la force vive de la forme $T(t, q_i, q_i')$ et l'hypothèse sur la fonction de force $U(q_i)$ des forces agissantes permettent d'interpréter convenablement les mouvements de ce système.

En utilisant les impulsions $p_i = \partial T/\partial q_i'$ on pourra utiliser en qualité d'équations de mouvement les équations de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{7.36}$$

avec la fonction de Hamilton $H = \sum p_i q_i' - T - U$.

Dans toute expérience réelle le système mécanique se meut dans un champ des forces appliquées, dont on peut tenir compte (dans la fonction U) en théorie, à d'insignifiantes forces perturbatrices près, et peut-être même avec des conditions initiales peu différentes du fait de l'imprécision des mesures expérimentales. Ces faibles écarts, qui existent toujours en principe, exercent une influence sur le mouvement réel du système mécanique. Si H^* est la vraie valeur de la fonction de Hamilton, les équations décrivant le mouvement réel du système sont de la forme

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}. \tag{7.37}$$

Les valeurs théoriques f_s des quantités $F_s(t, q_i, p_i)$ que l'on observe s'obtiennent en substituant dans la fonction $F_s(t, q_i, p_i)$ à q_i et p_i leurs valeurs déduites d'équations théoriques ou des mouvements non perturbés décrits par (7.36). Quant aux valeurs expérimentales φ_s des quantités F_s on les obtient en remplaçant les q_i et p_i par les solutions des équations réelles ou perturbées (7.37). Il s'ensuit que la condition (7.35) des petits écarts entre théorie et expérience

$$|f_s - \varphi_s| < \varepsilon$$

constitue la condition de la stabilité du mouvement théorique (H) en présence des forces perturbatrices $(H^* - H)$ par rapport aux quantités F_s observées.

215. Les études de stabilité en présence de forces perturbatrices sont ardues car la formulation du problème sous-entend que l'on ne connaît pas les forces perturbatrices $H^* - H$ sauf leur nature ou le degré de petitesse. Les critères de stabilité de Liapounov peuvent être utilisés pour déterminer les conditions nécessaires assurant la stabilité en présence des forces perturbatrices grâce au théorème suivant.

Si le mouvement théorique (H) correspondant aux données initiales $t = t_0$, $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$ est stable par rapport aux quantités F_s en présence des forces perturbatrices $(H^* - H)$ et malgré la perturbation des données initiales, le mouvement réel dans le champ H^* avec les données initiales

$t = t_0$, $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$ sera stable lorsque seules les données initiales seront perturbées.

En effet, soient f_s la valeur de F_s dans le mouvement non perturbé théorique, φ_s la valeur de F_s pour le mouvement perturbé et φ_s^0 la valeur de F_s pour le mouvement caractérisé par la fonction de Hamilton H^* pour $t = t_0$, $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$. Il résulte des inégalités

$$|f_s - \varphi_s| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_s - \varphi_s^0| < \varepsilon$$

que

$$|\varphi_s - \varphi_s^0| < 2\varepsilon.$$

216. La méthode directe de Liapounov pour l'étude de la stabilité du mouvement perturbé

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

consiste à déterminer quelques fonctions univoques, continues et bornées $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ dont les dérivées totales

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s$$

présentent certaines propriétés spécifiques.

Supposons que les fonctions V disparaissent lorsque tous les x_s sont nuls. Si la fonction V ne dépend pas de t et dans une région étroite située près de l'origine $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$ ne s'annule que lorsque tous les x_s sont nuls, la fonction V possède un *signe bien défini*. Si les dérivées partielles $\partial V/\partial x_s$ de la fonction de signe défini V sont continues, dans une petite région $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$ les surfaces $V = c$ seront fermées si $|c|$ est inférieur au minimum de $|V|$ sur la sphère $\sum x_s^2 = \varepsilon$. En effet, dans ce cas il n'existe aucun trajet menant de l'origine $x_s = 0$ vers un point quelconque sur la surface sphérique $\sum x_s^2 = \varepsilon$ sur lequel ne se trouverait un point où $V = c$.

On ne dira de la fonction $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ qu'elle est de signe défini que si on peut trouver une fonction définie positive indépendante de t $W(x_1, \ldots, x_n)$ telle que l'une des deux expressions $V - W$ ou $-V - W$ représente une fonction positive.

Dans une région suffisamment petite $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$ où $W = c$ représente une surface fermée entourant l'origine $x_s = 0$, les surfaces $V = c' < c$ seront également fermées pour toute valeur de t si $V - W$ est positif puisqu'on ne peut trouver aucun trajet menant de l'origine $x_s = 0$ en un point de la surface $W = c$ sur lequel le point $V = c'$ serait absent.

217. Le théorème fondamental de Liapounov sur la stabilité s'énonce comme suit : *si les équations différentielles décrivant le mouvement per-*

turbé sont telles que l'on peut trouver une fonction V de signe défini dont la dérivée V' serait, en vertu de ces équations, ou de signe constant et opposé au signe de V ou identiquement nulle, le mouvement non perturbé sera stable.

Démonstration. Supposons que V soit défini positif. Selon le théorème, dans une petite région $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$ on aura les inégalités

$$V' \leqslant 0 \quad \text{et} \quad V \geqslant W,$$

où W est une fonction définie positive indépendante de t des variables x_s.

Soit l la limite inférieure exacte de la fonction W sur la sphère $\sum x_s^2 = \varepsilon$. Supposons que la région $\sum x_s^2 < \eta$ soit commune aux régions $V < l$ pour t variant de t_0 à ∞.

De toute évidence, le mouvement qui a commencé par des perturbations initiales $x_s = \xi_s$ contenues à l'intérieur de $\sum \xi_s^2 < \eta$ ne pourra pas franchir les limites de la région $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$. En effet l'équation

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V'dt \leqslant 0$$

implique que

$$l > V_0 \geqslant V \geqslant W.$$

218. Théorème général de l'instabilité. Pour simplifier l'analyse on considérera un intervalle de variation de temps (t_0, ∞) fermé. On dira par convention que la région $V > 0$ est contenue dans $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$ si pour tout t compris dans l'intervalle (t_0, ∞) on peut trouver des x_s vérifiant l'inégalité $V > 0$.

Enoncé du théorème sur l'instabilité : *si les équations différentielles décrivant le mouvement perturbé sont telles :* 1) *qu'il existe une fonction V admettant une limite supérieure infinitésimale* *) *et définissant une région* $VV' > 0$, *et* 2) *que pour certaines valeurs de* x_s *numériquement aussi petites que l'on veut on peut délimiter dans la région* ($VV' > 0$) *un domaine où une certaine fonction* $W > 0$ *et à la frontière duquel* $W = 0$ *la dérivée totale par rapport au temps* W' *possède des valeurs d'un signe défini, — le mouvement non perturbé sera instable.*

Démonstration. Posons que dans la région définie en 1) $V > 0$ et qu'à la frontière $W = 0$ on a l'inégalité $W' > 0$. Les valeurs initiales des perturbations $x_s = \xi_s$ seront choisies à l'intérieur du domaine $W > 0$ défini en 2). Soit V_0 la valeur initiale de V. Pour une fonction V admettant une limite

*) Une fonction bornée V admet une limite supérieure infinitésimale si pour tout $l > 0$, aussi petit que soit l, on peut trouver un nombre $\lambda \neq 0$ tel que pour $t \geqslant t_0$ et $\sum_s x_s^2 \leqslant \lambda$ on aura $|V| < l$.

supérieure infinitésimale on peut trouver un λ qui sera inférieur aux valeurs de $\sum x_s^2$ compatibles avec l'inégalité $V \geqslant V_0$. Soit l le minimum de V' correspondant à notre choix de ξ_s, à t variant entre t_0 et ∞ et satisfaisant à la condition

$$\lambda \leqslant \sum x_s^2 \leqslant \varepsilon.$$

De l'équation

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V'dt$$

découle l'inégalité

$$V > V_0 + l(t - T). \tag{7.38}$$

Or, dans la région $\sum x_s^2 \leqslant \varepsilon$, la fonction V est bornée : $V < L$. L'inégalité (7.38) implique que pour t supérieur à $t_0 + \dfrac{L - V_0}{l}$ le mouvement doit sortir du domaine $W > 0$ contenu dans la région $VV' > 0$ à travers la surface sphérique $\sum x_s^2 = \varepsilon$.

Remarque. Dans l'énoncé du théorème la condition que W' possède sur $W = 0$ un signe défini signifie que sur $W = 0$ la dérivée W' ne peut avoir qu'un signe déterminé ou être égale à zéro ; dans le cas où $W' = 0$ il faut qu'à l'endroit correspondant la surface $W = 0$ soit simple (non multiple).

219. Le principe de la stabilité était nécessaire dans les principaux problèmes cosmogoniques formulés par Lagrange, Laplace, Poisson, Poincaré, Liapounov. Il fut le plus largement utilisé grâce à la mise en œuvre du théorème de Lagrange sur la stabilité de l'équilibre en présence d'une fonction de force lorsqu'il s'agissait de décrire les développements des équilibres de systèmes mécaniques variant lentement. Les lois de la physique telles que la loi de Hooke, de l'entropie, de l'attraction universelle de Newton, de la force de Lorentz satisfont aux conditions nécessaires du principe de la stabilité.

CHAPITRE VIII

THÉORIE DE L'ATTRACTION

220. La *loi de la gravitation universelle* s'énonce comme suit: deux points matériels de masses m et m' se trouvant à une distance r l'un de l'autre s'attirent avec une force

$$F = -f\frac{mm'}{r^2}.$$

La constante f est égale à la force d'attraction mutuelle de deux points de masse unité se trouvant à une distance unité l'un de l'autre. Par un choix convenable des unités de mesure la valeur de f peut être amenée à l'unité.

221. Soient n points fixes m_i ($i = 1, ..., n$) et un point mobile de masse μ se trouvant à une distance r_i des points m_i. La force d'attraction résultante s'exerçant sur la masse μ sera égale à la somme géométrique des forces d'attraction individuelles

$$F_i = -f\frac{\mu m_i}{r_i^2}.$$

Lors d'un déplacement élémentaire de la masse μ le travail produit par la force d'attraction résultante est égal à

$$-\sum f\frac{\mu m_i}{r_i^2}dr_i = df\mu\sum\frac{m_i}{r_i}.$$

Posons

$$U = \sum\frac{m_i}{r_i}.$$

Il s'ensuit que les forces d'attraction dérivent d'une fonction de force $f\mu U$.

L'ensemble des forces s'exerçant sur une masse unité $\mu = 1$ lorsque celle-ci occupe différentes positions P forme un *champ de force*. La direction et l'intensité de cette force en un point P représentent *l'orientation* et *l'intensité du champ*. La fonction de force de la gravitation universelle $f\mu U$ est appelée *potentiel newtonien*. On appellera *potentiel* tout court la fonction U.

222. Considérons un élément de surface $d\sigma$; dressons une normale à cette surface. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de cette normale, **F** la force d'attraction qu'éprouve un point P de l'élément $d\sigma$, $\mathbf{F}_n$ la composante de la force **F** suivant la normale, θ l'angle que fait la normale avec la direction de la force (fig. 148). L'expression

$$F_n d\sigma = F\cos\theta\, d\sigma = f\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right)d\sigma = f\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma$$

porte le nom de *flux de force* à travers l'élément de surface suivant la direction de la normale n. Le flux de force à travers une surface S dans le sens de la normale n est égal à la somme des flux élémentaires à travers les différents éléments $d\sigma$ de cette surface :

$$\iint_S F_n\, d\sigma = f\iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma.$$

223. Le flux de force à travers une surface fermée est facile à calculer s'il n'y a qu'un seul point d'attraction m. Déterminons le flux de force à travers l'élément $d\sigma$. Menons à travers $d\sigma$ des rayons-vecteurs issus du point m. Le cône que l'on définit ainsi interceptera sur les sphères de rayons r et 1 des éléments $d\omega'$ et $d\omega$ (fig. 149) :

$$d\omega' = d\sigma\cos\theta \quad \text{et} \quad d\omega' = r^2 d\omega.$$

Le flux de force à travers l'élément $d\sigma$ est égal à

$$-f\frac{m}{r^2}\cos\theta\, d\sigma = -fm\, d\omega.$$

Si on inverse le sens de la normale, l'expression du flux de force changera de signe. La quantité $d\omega$ est l'angle solide sous lequel on voit du point m l'élément $d\sigma$. Si on voit la face négative de l'élément $d\sigma$, on affectera la formule du signe moins, et du signe plus si on voit sa face positive. Par conséquent, le flux de force à travers une surface fermée dirigé de l'intérieur vers l'exté-

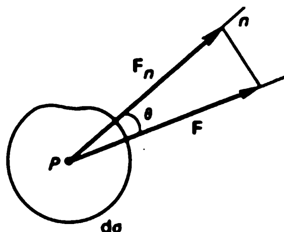


Fig. 148

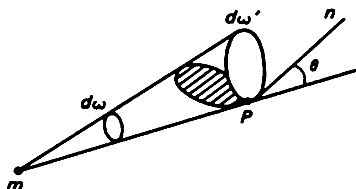


Fig. 149

rieur (n a le sens de la normale extérieure) est égal à $-4\pi fm$ si le point m est contenu à l'intérieur de la surface fermée ; il est égal à $-2\pi fm$ si le point est situé sur la surface là où la surface possède un plan tangent défini ; le flux est égal à zéro si le point m est situé hors de la surface.

224. Soient $m_1, \ldots, m_n$ des points matériels attractifs dont une partie se trouve à l'intérieur d'une surface fermée et l'autre à l'extérieur de celle-ci.

Théorème de Gauss. Le flux de force à travers cette surface fermée, dirigé de l'intérieur vers l'extérieur, est égal au produit de $-4\pi f$ par la somme des masses des points contenus à l'intérieur de la surface fermée.

En effet, les intégrales figurant dans le second membre de la formule

$$f \iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = -f \sum \iint_S \frac{m_i}{r_i^2} \cos(n, r_i) d\sigma$$

sont nulles pour les points m_i situés hors de la surface S et égales à $4\pi m_i$ pour les points m_i situés à l'intérieur de celle-ci.

225. Le potentiel vérifie l'équation de Laplace. On a

$$\Delta U = \Delta \sum \frac{m_i}{r_i} = \sum m_i \Delta \frac{1}{r_i}\,.$$

En notant x_i, y_i, z_i les coordonnées du point m_i et x, y, z les coordonnées du point P on a

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}\,,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_i}}{\partial x^2} = 3\frac{(x - x_i)^2}{r_i^5} - \frac{1}{r_i^3}\,, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_i}}{\partial y^2} = 3\frac{(y - y_i)^2}{r_i^5} - \frac{1}{r_i^3}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_i}}{\partial z^2} = 3\frac{(z - z_i)^2}{r_i^5} - \frac{1}{r_i^3}\,.$$

Après sommation on obtient $\Delta \dfrac{1}{r_i} = 0$ d'où $\Delta U = 0$.

226. En s'appuyant sur l'équation de Laplace on peut démontrer le théorème de Gauss analytiquement.

Dans le cas où la surface fermée S ne contient en son intérieur aucun point attractif, la fonction fU à l'intérieur de S vérifie l'équation de Laplace :

$$f\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = f\iiint\limits_V \Delta U\,d\tau = 0.$$

Supposons que de toutes les masses m_i la surface fermée S contient en son intérieur les masses $m_1, \ldots, m_p$. Le flux de force à travers la surface S dirigé de l'intérieur vers l'extérieur est égal à

$$f\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma,$$

où n est la normale extérieure. Entourons les points $m_1, \ldots, m_p$ par les sphères $S_1, \ldots, S_p$ de rayons aussi petits que l'on veut (fig. 150). Considérons le volume V délimité par la surface S et par les sphères $S_1, \ldots, S_p$. Pour les points contenus dans le volume V la fonction fU et ses dérivées premières sont continues

$$f\iint\limits_{S+S_1+\ldots+S_p} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = f\iiint\limits_V \Delta U\,d\tau = 0,$$

d'où

$$f\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma + f\iint\limits_{S_1} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma + \ldots + f\iint\limits_{S_p} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

Evaluons l'intégrale $I_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma$. On a $U = \frac{m_1}{r_1} + U_1$, où $U_1 = \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{m_i}{r_i}$ est une fonction continue vérifiant l'équation de Laplace

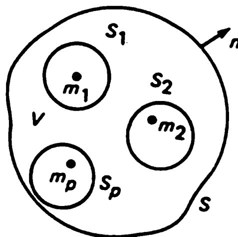


Fig. 150

à l'intérieur de la sphère S_1. On a donc

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{\partial \dfrac{m_1}{r_1}}{\partial n} d\sigma + \iint\limits_{S_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} d\sigma.$$

Selon la formule de Green, la deuxième intégrale est évidemment nulle. La normale n extérieure par rapport au volume V est intérieure pour la sphère S_1 ; $dn = -dr$:

$$\frac{\partial \dfrac{m_1}{r_1}}{\partial n} = -\frac{\partial \dfrac{m_1}{r_1}}{\partial r_1} = \frac{m_1}{r_1^2}.$$

On a donc

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{m_1}{r_1^2} d\sigma = \frac{m_1}{r_1^2} \iint\limits_{S_1} d\sigma = \frac{m_1}{r_1^2} 4\pi r_1^2 = 4\pi m_1,$$

ce qui entraîne

$$f \iint\limits_{S} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = -4\pi f(m_1 + \ldots + m_p) = -4\pi f M',$$

où $M' = m_1 + \ldots + m_p$ est la somme des masses contenues à l'intérieur de S.

§ 1. Masses continues

227. En considérant qu'une masse continue est formée d'un nombre infini de masses infinitésimales dm situées à une distance r du point P, le potentiel de la masse continue sera égal à

$$U = \int \frac{dm}{r}.$$

Pour un point arbitraire P situé hors des masses attractives dm, r ne peut jamais être nul et par suite

$$\Delta U = \int \Delta \frac{1}{r} dm = 0 \quad \left(\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

ce qui exprime que le potentiel U des masses continues vérifie l'équation de Laplace pour les points situés hors de la masse attractive.

Les masses continues peuvent être linéiques, surfaciques ou volumiques. Ce sont ces deux derniers types qui présentent le plus d'importance.

228. Potentiel d'une couche simple. Considérons des masses attractives disposées sur une surface S. Soit $d\sigma$ un élément de surface, dm la masse de la matière attractive recouvrant cet élément de surface ; la quantité $dm/d\sigma = \varrho$ est appelée *densité surfacique de la couche simple.* Le potentiel U est égal à

$$U = \int \frac{dm}{r} = \iint_S \frac{\varrho\, d\sigma}{r}.$$

229. Déterminons le potentiel d'une couche sphérique simple et homogène. Soient R le rayon de la sphère, ϱ la densité surfacique constante.

1° Le point P se trouve à l'intérieur de la sphère. A chaque élément $d\sigma$ de la surface sphérique on trouve de l'autre côté du point P un élément $d\sigma'$ découpé sur la sphère par le faisceau conique de rayons issus de $d\sigma$ et passant par le point P (fig. 151). Les forces d'attraction émanant des masses recouvrant ces éléments de surface et s'exerçant sur le point P sont égales à $f\varrho\, d\sigma/r^2$ et $f\varrho\, d\sigma'/r'^2$. Or comme

$$\frac{d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r'^2},$$

les forces d'attraction exercées par les éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ sur le point P sont égales et opposées. On peut décomposer la surface de la sphère en éléments s'opposant deux à deux, ce qui signifie que la force d'attraction totale qu'exerce une couche sphérique simple et homogène sur un point P situé à l'intérieur de la sphère est égale à zéro. Cela implique que le potentiel U régnant à l'intérieur d'une couche sphérique est constant. En plaçant le point P au centre de la sphère on trouve la valeur du potentiel auquel est soumis

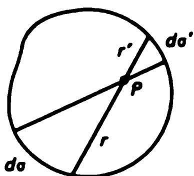


Fig. 151

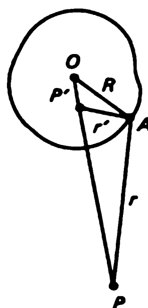


Fig. 152

un point matériel placé à l'intérieur de la sphère :

$$U = \frac{1}{R}\int dm = \frac{M}{R}.$$

2° Le point P se trouve hors de la sphère (fig. 152). Soit P' un point vérifiant la relation $OP' \cdot OP = R^2$. Les triangles OAP et $OP'A$ sont semblables car, l'angle O est compris entre deux côtés proportionnels, d'où

$$\frac{AP}{AP'} = \frac{r}{r'} = \frac{OP}{R},$$

et par suite

$$U_P = \int \frac{dm}{r} = \frac{R}{OP}\int \frac{dm}{r'} = \frac{R}{OP}U_{P'} = \frac{R}{OP}\frac{M}{R} = \frac{M}{OP}.$$

Le potentiel créé par une couche sphérique à l'emplacement d'un point extérieur à la sphère est égal à celui que produirait toute la masse de la couche si on la concentrait au centre de la sphère.

230. Le potentiel d'une couche sphérique simple et homogène est une fonction continue des coordonnées du point P. La force d'attraction exercée par une couche simple présente une discontinuité au passage à travers la couche. A l'intérieur de la couche la force d'attraction n'existe pas; pour un point extérieur P la force d'attraction est dirigée, selon la formule ci-dessus, vers le centre de la couche et sa valeur numérique est donnée par la formule

$$f\frac{dU_e}{dOP} = -f\frac{M}{OP^2} = -f\frac{4\pi R^2 \varrho}{OP^2};$$

à la limite où $OP \to R$, n désignant la normale extérieure, on aura

$$f\frac{\partial U_e}{\partial n} = -4\pi f\varrho,$$

ou sous une forme plus commode

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n} = 4\pi\varrho.$$

231. Posons que la surface S est recouverte par une masse attractive ayant une densité surfacique ϱ variable. Le potentiel

$$U = \iint_S \frac{\varrho\, d\sigma}{r}$$

est une fonction continue dont les dérivées normales deviennent discontinues à la traversée de la couche.

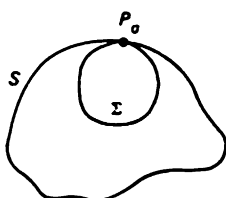


Fig. 153

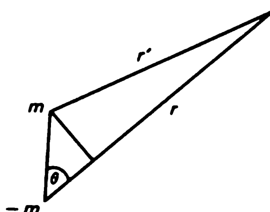


Fig. 154

La surface S et la sphère osculatrice Σ possèdent en commun, au point P, un élément de surface infinitésimal σ (fig. 153). Notons ϱ' la densité au point P et n la normale extérieure en ce même point :

$$U = \iint_S \frac{\varrho\, d\sigma}{r} = \iint_{S-\sigma} \frac{\varrho\, d\sigma}{r} - \iint_{\Sigma-\sigma} \frac{\varrho'\, d\sigma}{r} + \iint_{\Sigma} \frac{\varrho'\, d\sigma}{r}.$$

Les dérivées suivant la normale n au point P des deux premières intégrales du second membre sont continues puisque P est un point extérieur. La discontinuité des dérivées normales de la couche sphérique Σ (troisième intégrale) a déjà été démontrée. Par conséquent

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n} = 4\pi\varrho'.$$

On peut trouver une démonstration rigoureuse de ce théorème dans des ouvrages spécialisés. Le rôle de la sphère Σ peut être assumé par n'importe quelle sphère ayant au point P un plan tangent commun avec la surface S.

232. Couche double. Considérons le potentiel d'un aimant élémentaire infinitésimal. Soit ε la longueur de l'aimant, m la masse magnétique des pôles qui est positive au pôle Nord et négative au pôle Sud. Le potentiel est égal à

$$U = \frac{m}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m(r - r')}{rr'}.$$

Or $r - r' = \varepsilon \cos\theta$ (fig. 154) et $U = m\varepsilon \cos\theta / r^2$. On peut écrire le potentiel sous une autre forme

$$U = m\varepsilon \frac{(1/r') - (1/r)}{\varepsilon} = m\varepsilon \frac{\partial(1/r)}{\partial n},$$

si on entend par n la direction le long de l'aimant allant du pôle Sud au pôle Nord. En notant α, β, γ les cosinus directeurs de n on a

$$U = m\varepsilon\left(\alpha\frac{\partial(1/r)}{\partial x} + \beta\frac{\partial(1/r)}{\partial y} + \gamma\frac{\partial(1/r)}{\partial z}\right),$$

d'où on déduit aussitôt l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ pour les points P situés hors de l'aimant puisque α, β, γ sont des constantes ; x, y, z sont les coordonnées des points de l'aimant et ΔU se rapporte aux coordonnées du point courant P.

233. Considérons une surface S et supposons que les aimants élémentaires ont été établis en tout point de la surface S le long de la normale extérieure n. Posons que les masses magnétiques recouvrant les éléments $d\sigma$ de la surface S sont égales à (fig. 155)

$$\mp m = \mp \varrho\, d\sigma$$

et $\varrho\varepsilon = \mu$. Le potentiel de cette couche double est égal à

$$U = \iint\limits_S \frac{\mu\, d\sigma \cos\theta}{r^2} = \iint\limits_S \mu\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\, d\sigma.$$

En tout point hors de la couche double cette fonction vérifie l'équation de Laplace.

234. Considérons maintenant le cas où les masses attractives dm occupent un volume V. Notons $d\tau(a, b, c)$ un élément de volume et ϱ la densité volumique $dm = \varrho\, d\tau$.

Les composantes X, Y, Z des forces attractives en un point P ($m = 1$, de coordonnées x, y, z) se trouvant à une distance r de l'élément $d\tau$ sont égales à

$$X = f\iiint\limits_V \frac{a - x}{r^3}\varrho\, d\tau, \quad Y = f\iiint\limits_V \frac{b - y}{r^3}\varrho\, d\tau,$$

$$Z = f\iiint\limits_V \frac{c - z}{r^3}\varrho\, d\tau \quad (d\tau = da\, db\, dc).$$

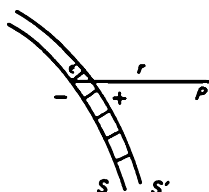


Fig. 155

Le potentiel est égal à

$$U = \iiint\limits_V \frac{\varrho\, d\tau}{r}.$$

Si le point P se trouve en dehors du volume V, les fonctions X, Y, Z, U possèdent des dérivées de différents ordres par rapport à x, y, z et

$$X = f\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = f\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = f\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Si le point P se trouve au sein des masses attractives V, cette assertion demande à être démontrée.

235. Il s'agit de démontrer que U, X, Y, Z sont des fonctions définies et finies quelle que soit la position du point P. Supposons que le point P se trouve à l'intérieur du volume occupé par les masses attractives. Utilisons un système de coordonnées polaires dont l'origine est au point P :

$$a - x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad b - y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad c - z = r\cos\theta.$$

On a donc $d\tau = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$ et par suite

$$X = f\iiint\limits_V \varrho\sin^2\theta\cos\varphi dr d\theta d\varphi,$$

$$Y = f\iiint\limits_V \varrho\sin^2\theta\sin\varphi dr d\theta d\varphi,$$

$$Z = f\iiint\limits_V \varrho\sin\theta\cos\theta dr d\theta d\varphi,$$

$$U = \iiint\limits_V \varrho r\sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Les expressions se trouvant sous le signe d'intégration de toutes ces fonctions sont finies pour un volume fini, ce qui signifie que U, X, Y, Z sont finies et définies.

236. La relation $X = f\dfrac{\partial U}{\partial x}$ est valable lorsque le point P se trouve dans le volume V. Notons V_1 un petit volume autour de P et V_2 le volume qui subsiste après soustraction de V du volume V_1,

$$U = U_1 + U_2, \quad X = X_1 + X_2, \ldots$$

Soient P' un point de coordonnées $x + \Delta x$, y, z situé à l'intérieur du volume V_1, $U' = U_1' + U_2'$ le potentiel au point P',

$$\frac{U' - U}{\Delta x} = \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} + \frac{U_2' - U_2}{\Delta x}.$$

Comme P' est un point extérieur par rapport à V_2, la limite du deuxième terme lorsque $P' \to P$ existe et est égale à $\partial U_2/\partial x$.

Analysons l'expression

$$\frac{U_1' - U_1}{\Delta x} = \iiint\limits_{V_1} \frac{\varrho\, d\tau}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

Dans le triangle $PP'd\tau$ on a $\Delta x > |r - r'|$ et par suite

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\right| = \left|\frac{r - r'}{\Delta x}\right| \frac{1}{rr'} < \frac{1}{rr'}.$$

De l'inégalité $\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)^2 > 0$ découle $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2}\right) > \frac{1}{rr'}$; notons ϱ_1 le maximum de ϱ pour V_1; on aura alors

$$\left|\frac{U_1' - U_1}{\Delta x}\right| < \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_1} \frac{\varrho_1\, d\tau}{r^2} + \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_1} \frac{\varrho_1\, d\tau}{r'^2}.$$

En coordonnées polaires

$$\iiint\limits_{V_1} \frac{\varrho_1\, d\tau}{r^2} = \iiint\limits_{V_1} \varrho_1 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Si C est le plus grand diamètre du volume V_1, on aura

$$\iiint\limits_{V_1} \frac{\varrho_1\, d\tau}{r^2} < C\varrho_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi\varrho_1 C.$$

On démontre de la même façon que

$$\iiint\limits_{V_1} \frac{\varrho_1\, d\tau}{r'^2} < 4\pi\varrho_1 C.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\frac{U_1' - U}{\Delta x}\right| < 4\pi\varrho_1 C.$$

Le volume V_1 pouvant être choisi aussi petit que l'on veut, C sera alors inférieur à tout nombre fixé et X_2 sera peu différent de X ; à la limite on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{X}{f},$$

ce qui démontre que le potentiel U possède partout des dérivées premières par rapport aux coordonnées.

237. Les dérivées secondes du potentiel existent évidemment pour un point extérieur P, mais $\Delta U = 0$.

Supposons maintenant que P est un point intérieur. On ne peut plus calculer les dérivées secondes du potentiel en procédant à une simple dérivation sous le signe d'intégration puisque $1/r$ y devient infini. On a (conformément aux résultats ci-dessus)

$$\frac{X}{f} = \frac{\partial U}{\partial x} = \iiint\limits_V \varrho \frac{a-x}{r^3} d\tau.$$

Mais comme

$$\frac{a-x}{r^3} \varrho = -\varrho \frac{\partial(1/r)}{\partial a} = -\frac{\partial(\varrho/r)}{\partial a} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a},$$

on doit avoir

$$\frac{X}{f} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\iiint\limits_V \frac{\partial(\varrho/r)}{\partial a} d\tau + \iiint\limits_V \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a} d\tau.$$

Entourons le point P par une sphère s de très petit rayon ε (fig. 156). En appliquant la formule de Green on a

$$\iiint\limits_{V-(s)} \frac{\partial(\varrho/r)}{\partial a} d\tau = \iint\limits_S \frac{\varrho}{r} \alpha \, d\sigma + \iint\limits_s \frac{\varrho}{r} \alpha \, d\sigma,$$

où la dernière intégrale est égale à zéro.

On aura donc

$$\frac{X}{f} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\iint\limits_S \frac{\varrho}{r} \alpha \, d\sigma + \iiint\limits_V \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial a} d\tau;$$

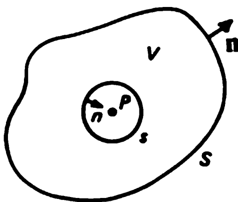


Fig. 156

la première intégrale représente le potentiel d'une couche simple ayant une densité surfacique $\varrho\alpha$; la seconde intégrale est le potentiel volumique de densité $\partial\varrho/\partial a$. Comme ces potentiels possèdent des dérivées, on aura

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\iint\limits_S \frac{a-x}{r^3}\,\varrho\alpha\,d\sigma + \iiint\limits_V \frac{a-x}{r^3}\,\frac{\partial\varrho}{\partial a}\,d\tau.$$

On trouve de même $\partial^2U/\partial y^2$, $\partial^2U/\partial z^2$. Les dérivées secondes du potentiel U sont continues à l'intérieur du volume, mais deviennent discontinues à la traversée de la surface S.

238. Ayant établi les égalités $X = f\,\dfrac{\partial U}{\partial x}$, ... on peut affirmer directement que le flux de la force d'attraction à travers une surface Σ, dirigé de l'intérieur vers l'extérieur, vérifie le théorème de Gauss

$$\iint\limits_\Sigma F_n\,d\sigma = f\iint\limits_\Sigma \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi M'f,$$

où M' est la masse contenue à l'intérieur de Σ. Il résulte du théorème de Gauss, conformément au théorème de Green et à la relation

$$M' = \iiint\limits_W \varrho\,d\tau,$$

que

$$\iiint\limits_W (\Delta U + 4\pi\varrho)d\tau = 0,$$

où W est le volume délimité par la surface Σ ; comme Σ est arbitraire, on a

$$\Delta U = -4\pi\varrho,$$

ce qui signifie qu'à l'intérieur du volume le potentiel U vérifie l'équation de Poisson.

239. Potentiel d'une boule homogène de rayon R. 1° Le point P se trouve en dehors de la boule. Divisons la boule en couches sphériques infiniment minces. On aura alors

$$U_e = \int_0^R \frac{4\pi r^2\varrho}{OP}\,dr = \frac{4}{3}\,\pi\varrho\,\frac{R^3}{OP} = \frac{M}{OP},$$

où ϱ est la densité.

2° Le point P est choisi à l'intérieur de la boule ; $OP < R$. La sphère de rayon OP partage les couches sphériques en deux groupes : pour les unes le

rayon $r \leqslant OP$ (le point P est à l'extérieur), pour les autres $r \geqslant OP$ (le point P est à l'intérieur) :

$$U = \int_0^{OP} \frac{4\pi r^2 \varrho \, dr}{OP} + \int_{OP}^{R} 4\pi \varrho r dr =$$

$$\frac{4}{3}\pi OP^2 \varrho + 2\pi\varrho R^2 - 2\pi\varrho OP^2 = 2\pi\varrho R^2 - \frac{2}{3}\pi\varrho OP^2.$$

240. Potentiel créé par un corps limité à grande distance. Soit P un point matériel subissant l'attraction qui se trouve à très grande distance (fig. 157) et soit m la masse attractive ponctuelle de coordonnées a, b, c ; $mP = r$. Choisissons O pour origine des coordonnées en posant $mO = \delta$, $\angle mOP = \gamma$, $OP = R$. Dans le triangle mOP, $r^2 = R^2 + \delta^2 - 2R\delta\cos\gamma$. On en tire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\delta\cos\gamma}{R} + \frac{\delta^2}{R^2}}}.$$

En développant en série suivant les puissances de $1/R$ et ne gardant que les trois premiers termes on obtient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2}\cos\gamma + \frac{\delta^2}{2R^3}(3\cos^2\gamma - 1) + \frac{\varepsilon}{R^4}.$$

En prenant $\overline{OP}$ pour axe x (fig. 157), on a $a = \delta\cos\gamma$ et

$$U = \iiint_V \frac{\varrho \, d\tau}{r} = \frac{1}{R}\iiint_V \varrho \, d\tau + \frac{1}{R^2}\iiint_V a\varrho \, d\tau +$$

$$\frac{1}{2R^3}\iiint_V \varrho(3a^2 - \delta^2) d\tau + \frac{k}{R^4}.$$

Or

$$\iiint_V \varrho \, d\tau = M, \quad \iiint_V a\varrho \, d\tau = M\xi,$$

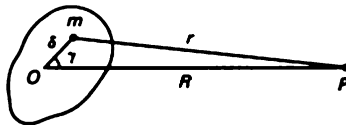


Fig. 157

où ξ est la coordonnée sur l'axe x du centre de gravité du corps attractif ; comme $3a^2 - \delta^2 = 3a^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3(b^2 + c^2)$, la troisième intégrale est égale à

$$\iiint\limits_V \varrho(3a^2 - \delta^2)d\tau = 2\iiint\limits_V \varrho(a^2 + b^2 + c^2)d\tau - 3\iiint\limits_V \varrho(b^2 + c^2)d\tau = 2\mathfrak{M}_0 - 3I,$$

où $\mathfrak{M}_0$ est le moment d'inertie du corps par rapport au point O, I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OP,

$$U = \frac{M}{R} + \frac{M\xi}{R^2} + \frac{2\mathfrak{M}_0 - 3I}{R^3} + \frac{k}{R^4}.$$

Lorsque $R \to \infty$, $U \to M/R$.

241. Formule de Gauss. Le volume V, limité par la surface S, est occupé par une masse homogène de densité ϱ. Soient $d\sigma$ un élément de surface de S ; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à S ; a, b, c les coordonnées d'un point appartenant à l'élément de volume $d\tau$; x, y, z les coordonnées du point courant P ;

$$r = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}.$$

Considérons le vecteur dont les projections sont

$$A = \frac{1}{2}\frac{a - x}{r}, \quad B = \frac{1}{2}\frac{b - y}{r}, \quad C = \frac{1}{2}\frac{c - z}{r}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = \frac{1}{r}.$$

Le potentiel U est égal à

$$U = \iiint\limits_V \frac{\varrho\, d\tau}{r} = \varrho \iiint\limits_V \left(\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c}\right) d\tau =$$

$$\varrho \iint\limits_S (A\alpha + B\beta + C\gamma)d\sigma = \frac{\varrho}{2}\iint\limits_S \frac{(a - x)\alpha + (b - y)\beta + (c - z)\gamma}{r}\, d\sigma =$$

$$\frac{\varrho}{2}\iint\limits_S \cos(r, n)d\sigma.$$

L'expression $(a - x)\alpha + (b - y)\beta + (c - z)\gamma = p$ est la distance algébrique du point P jusqu'au plan tangent à la surface S au point a, b, c. On a

donc

$$U = \frac{\varrho}{2} \iint_S \frac{p}{r}\, d\sigma.$$

Ainsi le potentiel U des masses volumiques est égal à celui d'une couche simple de densité surfacique égale à $\frac{1}{2}\varrho p$. Cette densité fictive dépend de la position du point P. Les composantes de l'attraction se laissent déterminer aisément:

$$\frac{1}{f} X = -\frac{\varrho}{2} \iint_S \frac{\alpha}{r}\, d\sigma + \frac{\varrho}{2} \iint_S \frac{p(a-x)}{r^3}\, d\sigma,$$

puisque $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\alpha$ et $\dfrac{\partial(1/r)}{\partial x} = \dfrac{a-x}{r^3}$. Mais comme

$$\frac{1}{f} X = \varrho \iiint_V \frac{a-x}{r^3}\, d\tau = -\varrho \iiint_V \frac{\partial(1/r)}{\partial a}\, d\tau = -\varrho \iint_S \frac{\alpha}{r}\, d\sigma,$$

on a

$$X = f\varrho \iint_S \frac{P(a-x)}{r^3}\, d\sigma.$$

§ 2. Potentiel de l'ellipsoïde homogène

242. Soit ϱ la densité, x', y', z' les coordonnées des points attractifs. Nous allons calculer

$$U = \varrho \iiint \frac{d\tau}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

où l'intégration est étendue à tout le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} \leqslant 1.$$

Le calcul du potentiel U est difficile en raison des bornes d'intégration variables. Dirichlet évita ces difficultés en utilisant le facteur de discontinuité :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos(f\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 1 & \text{si } f < 1, \\ 1/2 & \text{si } f = 1, \\ 0 & \text{si } f > 1. \end{cases}$$

Pour l'ellipsoïde considéré le facteur de discontinuité est de la forme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\left[\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)\varphi\right]d\varphi,$$

et son utilisation permet d'écrire le potentiel sous la forme

$$U=\frac{2\varrho}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi\iiint_{-\infty}^{+\infty}\cos\left[\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)\varphi\right]\frac{dx'dy'dz'}{r},$$

ou encore

$$U=\operatorname{Re}\frac{2\varrho}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi\iiint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)\varphi i\right]\frac{dx'dy'dz'}{r}.$$

En utilisant la formule connue de l'analyse

$$\int_0^\infty \frac{e^{r^2\psi i}}{\sqrt{\psi}}d\psi=\frac{\sqrt{\pi}}{r}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

on obtient

$$U=\operatorname{Re}\frac{2}{\pi}\frac{\varrho}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty d\psi\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}d\varphi\times$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\left[\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)\varphi+r^2\psi\right]i\right\}dx'dy'dz'.$$

On a aussi

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=$$
$$x^2+y^2+z^2-2xx'-2yy'-2zz'+x'^2+y'^2+z'^2.$$

Introduisons les intégrales

$$Q_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{a^2}\right)x'^2-2xx'\psi\right]i\right\}dx',\quad Q_y=\ldots,\quad Q_z=\ldots$$

en fonction desquelles le potentiel s'écrit

$$U = \operatorname{Re} \frac{2\varrho}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}} \exp\{(x^2 + y^2 + z^2)\psi i\} Q_x Q_y Q_z d\varphi\, d\psi.$$

243. Procédons aux calculs. En utilisant la formule connue de l'analyse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{(hu^2 - 2ku)i\} du = \sqrt{\frac{\pi}{h}} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k^2}{h}\right)i\right\}$$

on obtient

$$Q_x = \sqrt{\frac{\pi}{\psi + \varphi/a^2}} \exp\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x^2\psi^2}{\psi + \varphi/a^2}\right)i\right\}$$

et des expressions analogues pour Q_y, Q_z. Par conséquent

$$Q_x Q_y Q_z = \pi^{3/2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \frac{1}{\sqrt{(\psi + \varphi/a^2)(\psi + \varphi/b^2)(\psi + \varphi/c^2)}} \times$$
$$\exp\left\{-\psi^2\left(\frac{x^2}{\psi + \varphi/a^2} + \frac{y^2}{\psi + \varphi/b^2} + \frac{z^2}{\psi + \varphi/c^2}\right)i\right\}.$$

En posant

$$S\varphi = (x^2 + y^2 + z^2)\psi - \psi^2\left(\frac{x^2}{\psi + \varphi/a^2} + \frac{y^2}{\psi + \varphi/b^2} + \frac{z^2}{\psi + \varphi/c^2}\right) =$$
$$\psi\left[x^2\left(1 - \frac{\psi}{\psi + \varphi/a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{\psi}{\psi + \varphi/b^2}\right) + z^2\left(1 - \frac{\psi}{\psi + \varphi/c^2}\right)\right] =$$
$$\psi\left[x^2\frac{\varphi/a^2}{\psi + \varphi/a^2} + y^2\frac{\varphi/b^2}{\psi + \varphi/b^2} + z^2\frac{\varphi/c^2}{\psi + \varphi/c^2}\right] =$$
$$\varphi\psi\left(\frac{x^2}{\varphi + a^2\psi} + \frac{y^2}{\varphi + b^2\psi} + \frac{z^2}{\varphi + c^2\psi}\right) =$$
$$\varphi\left(\frac{x^2}{a^2 + \varphi/\psi} + \frac{y^2}{b^2 + \varphi/\psi} + \frac{z^2}{c^2 + \varphi/\psi}\right),$$

il vient

$$U = \operatorname{Re} 2\varrho e^{\frac{\pi}{2}i} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}} \frac{e^{S\varphi i}}{\sqrt{(\psi + \varphi/a^2)(\psi + \varphi/b^2)(\psi + \varphi/c^2)}} d\varphi\, d\psi.$$

Utilisons à la place de ψ la nouvelle variable $s = \frac{\varphi}{\psi}$; $ds = -\frac{\varphi}{\psi^2}d\psi$. On obtient alors

$$U = \operatorname{Re} 2\varrho e^{\frac{\pi}{2}i} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s/a^2)(1+s/b^2)(1+s/c^2)}} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2} e^{S\varphi i} d\varphi$$

puisque lorsque ψ varie entre 0 et ∞, la variable s varie de ∞ à 0 ;

$$S = \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s}.$$

Passons à la fonction réelle

$$U = -2\varrho \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s/a^2)(1+s/b^2)(1+s/c^2)}} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^2} \sin S\varphi \, d\varphi.$$

244. L'intégration par rapport à φ s'effectue de la façon suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -4\varrho x \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)D} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos S\varphi \, d\varphi ;$$

$$D = \sqrt{(1+s/a^2)(1+s/b^2)(1+s/c^2)}.$$

Or

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos S\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } S < 1, \\ 0 & \text{si } S > 1. \end{cases}$$

Pour les points situés à l'intérieur de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$ et pour s variant de 0 à ∞ on aura *a fortiori*

$$S = \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} < 1.$$

Donc pour un point intérieur on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)D}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2\pi\varrho y \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)D},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi\varrho z \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)D}.$$

Considérons un point (x, y, z) se trouvant en dehors de l'ellipsoïde. Par ce point passe un ellipsoïde confocal à l'ellipsoïde considéré :

$$\frac{x^2}{a^2 + \sigma} + \frac{y^2}{b^2 + \sigma} + \frac{z^2}{c^2 + \sigma} = 1.$$

Pour $s < \sigma$ on a $S > 1$ et par suite

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos S\varphi \, d\varphi = 0,$$

et pour $s > \sigma$ on a $S < 1$ et donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos S\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Donc pour un point extérieur

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi\varrho x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)D}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2\pi\varrho y \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)D},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi\varrho z \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)D}.$$

Mais comme $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$, on obtient

$$U = \pi\varrho \int_0^\infty \left(C - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{D} \quad \text{pour les points intérieurs,}$$

$$U = \pi\varrho \int_\sigma^\infty \left(C - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{D} \quad \text{pour les points extérieurs.}$$

Les constantes figurant dans ces expressions sont égales puisque nous devons obtenir la même expression du potentiel U pour les points situés à la surface de l'ellipsoïde. Pour un point à l'infini $\sigma = \infty$ la deuxième expression permet de déterminer que $C = 1$.

245. Rodrigues proposa une autre méthode de calcul du potentiel d'un ellipsoïde homogène. Soient ϱ la densité ; ξ, η, ζ les coordonnées du point attractif ; x, y, z les coordonnées du point attiré ; a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde. Considérons un ellipsoïde, confocal et peu différent de l'ellipsoïde

donné, dont les demi-axes sont a', b', c':

$$a'^2 = a^2 + \delta\lambda, \quad b'^2 = b^2 + \delta\lambda, \quad c'^2 = c^2 + \delta\lambda. \tag{8.1}$$

Déterminons la variation que subit le potentiel

$$U = \varrho \iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

lorsqu'on passe de l'ellipsoïde donné à l'ellipsoïde confocal. Procédons au changement de variables :

$$\xi = aR\cos\theta, \quad \eta = bR\sin\theta\cos\psi, \quad \zeta = cR\sin\theta\sin\psi. \tag{8.2}$$

Les nouvelles variables varient dans les limites $0 \leqslant R \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$:

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = abcR^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\psi,$$

et par suite

$$U = \varrho abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2\theta\, dR\, d\theta\, d\psi}{r}$$

et

$$\delta\left(\frac{U}{abc}\right) = \varrho \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\left(\frac{1}{r}\right) R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\psi.$$

Conformément à (8.2) et (8.1) on a $\delta a^2 = \delta b^2 = \delta c^2 = \delta\lambda$,

$$\frac{\delta\xi}{\xi} = \frac{\delta a}{a} = \frac{1}{2}\frac{\delta\lambda}{a^2}, \quad \frac{\delta\eta}{\eta} = \frac{\delta b}{b} = \frac{1}{2}\frac{\delta\lambda}{b^2}, \quad \frac{\delta\zeta}{\zeta} = \frac{\delta c}{c} = \frac{1}{2}\frac{\delta\lambda}{c^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(\xi - x)\delta\xi + (\eta - y)\delta\eta + (\zeta - z)\delta\zeta}{r^3} =$$
$$-\frac{\delta\lambda}{2r^3}\left[\frac{(\xi - x)\xi}{a^2} + \frac{(\eta - y)\eta}{b^2} + \frac{(\zeta - z)\zeta}{c^2}\right] = -\frac{\delta\lambda}{2r^3}N$$

et

$$\delta\left(\frac{U}{abc}\right) = -\frac{\varrho\delta\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{N}{r^3} R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\psi, \tag{8.3}$$

avec $N = \dfrac{(\xi - x)\xi}{a^2} + \dfrac{(\eta - y)\eta}{b^2} + \dfrac{(\zeta - z)\zeta}{c^2}$.

246. Posons R = constante ; les formules (8.2) définissent un ellipsoïde semblable à celui qui est donné :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = R^2.$$

Considérons simultanément l'ellipsoïde $R + dR$. Notons (ξ, η, ζ) les points de l'ellipsoïde R, ε le segment de la normale (α, β, γ) à l'ellipsoïde R compris entre les ellipsoïdes R et $R + dR$; l'équation de l'ellipsoïde $R + dR$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{(\xi + \alpha\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{(\eta + \beta\varepsilon)^2}{b^2} + \frac{(\zeta + \gamma\varepsilon)^2}{c^2} = (R + dR)^2,$$

et aux quantités du premier ordre par rapport à ε près (fig. 158) cette équation s'écrit

$$\varepsilon\left(\frac{\alpha\xi}{a^2} + \frac{\beta\eta}{b^2} + \frac{\gamma\zeta}{c^2}\right) = R\,dR.$$

Mais comme

$$\alpha = \frac{\xi/a^2}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}, \quad \beta = \frac{\eta/b^2}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}, \quad \gamma = \frac{\zeta/c^2}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}},$$

après multiplication de ces égalités par α, β, γ et leur sommation, la formule précédente s'écrira

$$\varepsilon\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}} = R\,dR,$$

d'où

$$\alpha R\,dR = \frac{\varepsilon\xi}{a^2}, \quad \beta R\,dR = \frac{\varepsilon\eta}{b^2}, \quad \gamma R\,dR = \frac{\varepsilon\zeta}{c^2}.$$

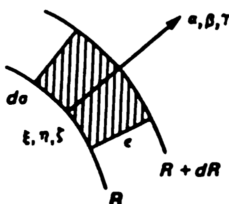


Fig. 158

La figure 158 montre que l'élément de volume est égal à

$$abcR^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\psi = \varepsilon\, d\sigma,$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface de l'ellipsoïde (R). On aura donc

$$\frac{N}{r^3} R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\psi = \frac{N}{r^3}\frac{\varepsilon d\sigma}{abc} = \frac{\varepsilon d\sigma}{r^3 abc}\left[\frac{(\xi - x)\xi}{a^2} + \frac{(\eta - y)\eta}{b^2} + \frac{(\zeta - z)\zeta}{c^2}\right] =$$

$$\frac{d\sigma}{r^2 abc}\left[\frac{\xi - x}{r}\frac{\varepsilon\xi}{a^2} + \frac{\eta - y}{r}\frac{\varepsilon\eta}{b^2} + \frac{\zeta - z}{r}\frac{\varepsilon\zeta}{c^2}\right] = \frac{d\sigma}{abc}\frac{\cos(r, n)}{r^2} R\, dR,$$

et la formule (8.3) peut s'écrire

$$\delta\left(\frac{U}{abc}\right) = -\frac{\varrho\delta\lambda}{2abc}\int_0^1 \left[\int \frac{\cos(r, n) d\sigma}{r^2}\right] R\, dR. \qquad (8.4)$$

247. Considérons le cas où le point attiré (x, y, z) se situe hors de l'ellipsoïde $R = 1$ donné. Ce point se situe hors de tout ellipsoïde semblable $0 \leqslant R \leqslant 1$. D'après le théorème de Gauss, on a pour l'ellipsoïde R dans l'intervalle (0, 1)

$$\int \frac{\cos(r, n) d\sigma}{r^2} = 0.$$

En appliquant la formule (8.4) on obtient le théorème de Maclaurin

$$\delta\left(\frac{U}{abc}\right) = 0, \quad \frac{U}{abc} = \text{const.}$$

248. Plaçons maintenant le point (x, y, z) à l'intérieur de l'ellipsoïde $R = 1$. On peut trouver un ellipsoïde $R = R_1$ semblable à l'ellipsoïde donné et passant par le point (x, y, z) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = R_1^2 < 1.$$

Pour les ellipsoïdes $R > R_1$ le point (x, y, z) sera intérieur. Selon le théorème de Gauss

$$\int \frac{d\sigma \cos(r, n)}{r^2} = 4\pi.$$

Pour les ellipsoïdes $R < R_1$ le point (x, y, z) est extérieur et de ce fait

$$\int_0^{R_1} \left[\int \frac{d\sigma \cos(r, n)}{r^2}\right] R\, dR = 0,$$

ce qui entraîne

$$\delta\left(\frac{U}{abc}\right) = -\frac{2\pi\varrho\delta\lambda}{abc}\int_{R_1}^{1} R\,dR = \frac{\pi\varrho\delta\lambda}{abc}(1 - R_1^2) =$$

$$-\frac{\pi\varrho\delta\lambda}{abc}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

249. Disposant maintenant des formules indispensables nous allons calculer le potentiel U. Soit à calculer le potentiel d'un ellipsoïde de demi-axes α, β, γ. Toute la partie de l'espace qui est à l'extérieur de cet ellipsoïde peut être recouverte d'ellipsoïdes confocaux de demi-axes $\sqrt{\alpha^2 + \lambda}$, $\sqrt{\beta^2 + \lambda}$, $\sqrt{\gamma^2 + \lambda}$. La valeur $\lambda = 0$ correspond à l'ellipsoïde donné et la valeur $\lambda = \infty$ à un ellipsoïde infiniment grand. Nous savons quelle est la variation du potentiel qui accompagne le passage d'un ellipsoïde à un autre ellipsoïde confocal. Il suffit donc de connaître la valeur de U pour l'un des ellipsoïdes confocaux pour pouvoir déterminer le potentiel de n'importe quel ellipsoïde de la suite $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$. $\lambda = \infty$ représente la totalité de l'espace occupé par une masse de matière de densité ϱ. En passant de l'ellipsoïde λ à l'ellipsoïde $\lambda + d\lambda$ on peut appliquer les formules précédentes. Posons que le point (x, y, z) se trouve à l'intérieur de l'ellipsoïde $\lambda = 0$. Ce point sera donc contenu dans n'importe quel ellipsoïde $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$. En posant $a^2 = \alpha^2 + \lambda$, $b^2 = \beta^2 + \lambda$, $c^2 = \gamma^2 + \lambda$ on aura

$$d\frac{U}{\sqrt{(\alpha^2 + \lambda)(\beta^2 + \lambda)(\gamma^2 + \lambda)}} = -\frac{\pi\varrho\,d\lambda}{\sqrt{(\alpha^2 + \lambda)(\beta^2 + \lambda)(\gamma^2 + \lambda)}} \times$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} - \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda}\right).$$

Si on pose $\Delta = \sqrt{(\alpha^2 + \lambda)(\beta^2 + \lambda)(\gamma^2 + \lambda)}$,

$$\left[\frac{U}{\Delta}\right]_\infty^0 = -\pi\varrho\int_\infty^0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} - \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda}\right)\frac{d\lambda}{\Delta};$$

mais comme $(U/\Delta)_{\lambda=\infty} = 0$, on obtient

$$U = \pi\varrho\alpha\beta\gamma\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} - \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda}\right)\frac{d\lambda}{\Delta}.$$

Supposons maintenant que le point (x, y, z) se trouve en dehors de l'ellipsoïde $\lambda = 0$. On pourra trouver parmi les ellipsoïdes confocaux l'ellipsoïde $\lambda = \lambda_0$ qui passe par le point (x, y, z). Pour les ellipsoïdes $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ le point

(x, y, z) sera extérieur et $\delta(U/\Delta) = 0$; pour les ellipsoïdes $\lambda_0 < \lambda \leqslant \infty$ le point (x, y, z) sera intérieur et par suite pour $\lambda_0 < \lambda \leqslant \infty$

$$d\left(\frac{U}{\Delta}\right) = -\frac{\pi\varrho d\lambda}{\Delta}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} - \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda}\right).$$

L'intégration de cette formule entre λ_0 et ∞ et l'utilisation du théorème de Maclaurin

$$\left[\frac{U}{\Delta}\right]_{\lambda_0}^{\infty} = 0$$

conduit directement à la formule

$$U = \pi\varrho\alpha\beta\gamma \int_{\lambda_0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}\right) d\lambda.$$

§ 3. Propriétés générales des fonctions harmoniques

250. Les fonctions qui vérifient l'équation de Laplace jouent un rôle important en mécanique et en physique. Nous n'envisageons ici que les fonctions continues et univoques ainsi que leurs dérivées partielles des premier et second ordres.

Dans le cas d'un volume infinitésimal $d\tau$ contenant le point (x, y, z) la formule de Green

$$\iiint_V \Delta U \, d\tau = \iint_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

donne le résultat suivant :

$$\Delta U = \frac{1}{d\tau} \iint_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

qui prouve l'invariance de ΔU (qui est indépendant du choix du système d'axes orthogonaux).

Si la fonction U est harmonique dans le volume V et si U et ses dérivées partielles des premier et second ordres sont finies, on obtient en appliquant la formule de Green.

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Cette relation permet de formuler plusieurs corollaires.

Si la fonction harmonique U et ses dérivées premières et secondes sont continues dans le volume V, la fonction U ne peut avoir dans ce volume ni maximum, ni minimum isolé.

Supposons, en effet, que U soit maximum au point P. Entourons P d'une sphère S de très petit rayon. Dans ce cas l'expression

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

sera négative (n — normale extérieure), ce qui se trouve en contradiction avec la propriété déjà prouvée. Par conséquent, U ne possède à l'intérieur de V ni maximum ni minimum isolé. Il s'ensuit que si U représente le potentiel des forces d'attraction newtoniennes, le potentiel U ne possède ni maximum ni minimum en dehors des masses attractives. Selon le théorème réciproque du théorème de Lagrange, dans le champ des forces newtoniennes il n'existe aucune position d'équilibre stable en dehors des masses attractives.

On démontre de la même façon qu'une fonction harmonique ne peut posséder ni sur une ligne, ni sur une surface, ni dans un volume une valeur constante plus grande ou plus petite que toutes les valeurs contiguës (proches). Il s'ensuit que si une fonction harmonique U prend, sur une surface S, des valeurs nulles, elle sera également nulle dans le volume V délimité par la surface S, à condition que dans V la fonction U et ses dérivées partielles soient partout harmoniques et finies.

Corollaire. Si deux fonctions U_1 et U_2 et leurs dérivées des premier et second ordres sont finies dans un volume V et possèdent sur la surface qui délimite ce volume les mêmes valeurs, ces fonctions sont identiques dans le volume V. Une fonction harmonique qui est univoque, finie et définie, ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre inclu, dans tous les points finis et infinis de l'espace est constante.

251. Principe de Dirichlet. Il n'existe qu'une seule fonction univoque, harmonique et finie, dont les dérivées partielles des premier et second ordres jouissent de ces mêmes propriétés dans une région V, qui prend sur la surface S délimitant V des valeurs prédéterminées et continues.

Riemann démontra l'existence d'une telle fonction à l'aide d'une expérience physique imaginaire.

Dirichlet le démontra de la façon suivante. Soit φ une fonction de x, y, z qui est finie, ainsi que ses dérivées partielles des premier et second ordres, dans une région V et prenant sur la surface S des valeurs données, et soit

$$I_\varphi = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Parmi les différentes fonctions φ il en existe une (notons-la φ) pour laquelle l'intégrale I possède la plus petite valeur ; les autres fonctions seront de la forme

$$\Phi = \varphi + \varepsilon\psi,$$

où ψ est une fonction arbitraire dans la région V et ayant des valeurs nulles sur S. On peut donc écrire

$$I_\Phi = \iiint\limits_V \left[\frac{\partial(\varphi + \varepsilon\psi)^2}{\partial x} + \ldots\right] d\tau = I_\psi + 2\varepsilon H + \varepsilon^2 I_\psi$$

avec

$$H = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) d\tau.$$

En exigeant que I_φ soit minimum, on doit avoir $H = 0$ quelle que soit la fonction ψ. En appliquant le théorème de Green il vient.

$$H = \iint\limits_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_V \psi\, \Delta\varphi\, d\tau$$

Sur la surface S la fonction ψ est nulle et la première intégrale disparaît. Selon la condition

$$H = -\iiint\limits_V \psi\, \Delta\varphi\, d\tau = 0,$$

ψ étant arbitraire, on obtient

$$\Delta\varphi = 0,$$

i.e. la fonction φ pour laquelle I_φ possède la plus petite valeur est une fonction harmonique. C'est la démonstration de Dirichlet. Weierstrass estime que la démonstration de l'existence d'une fonction φ pour laquelle I_φ a un minimum n'est pas rigoureuse.

252. Problème de Neumann. Supposons que sur la surface S $\partial U/\partial n$ soit égal à zéro et qu'à l'intérieur de S la fonction U soit harmonique. En appliquant la formule de Green

$$\iiint\limits_V U \Delta U\, d\tau + \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \iint\limits_S U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

on déduit que $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ à l'intérieur de S, ce qui signifie que la fonction U est constante.

Corollaire. Si dans un volume V deux fonctions U_1 et U_2 ainsi que leurs dérivées des premier et second ordres sont finies et si sur la surface S délimitant le volume V $\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n}$, la différence $U_1 - U_2$ à l'intérieur du volume V sera constante. Autrement dit, connaissant la valeur de $\partial U/\partial n$ sur la surface S, on connaît U dans V à une constante additive près.

253. Détermination de la fonction harmonique U connaissant U et $\partial U/\partial n$ sur la surface. Soient a, b, c les coordonnées d'un point A à l'intérieur de V (fig. 159). Entourons le point A d'une sphère σ de très petit rayon. Appliquons la formule de Green

$$\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma + \iint_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

Pour la sphère σ on a

$$\iint_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{r}\iint_\sigma \frac{\partial U}{\partial n}d\sigma = -\frac{1}{r}\iiint \Delta U\, d\tau = 0$$

et

$$\iint_\sigma U\frac{\partial(1/r)}{\partial n}d\sigma = -\frac{U}{r^2}\iint_\sigma d\sigma = -4\pi U(a, b, c).$$

Par conséquent

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma.$$

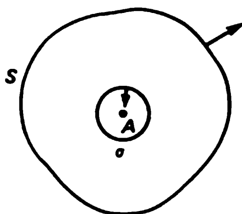


Fig. 159

254. La valeur moyenne de la fonction harmonique sur la surface de la sphère est égale à sa valeur au centre. Soient S une surface sphérique de rayon r et a, b, c les coordonnées de son centre. Selon la formule ci-dessus

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi r}\iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi r^2}\iint_S U\,d\sigma = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_S U\,d\sigma.$$

255. La fonction de Green. La fonction $G(x, y, z, a, b, c)$ est appelée *fonction de Green* à condition : 1° qu'elle soit harmonique à l'intérieur du volume V délimité par S ; 2° que la fonction et ses dérivées des premier et second ordres soient finies dans le volume V ; 3° que sur la surface S ses valeurs soitent égales à $1/r$. En appliquant la relation

$$\iint\left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma = 0$$

on obtient

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint_S U\left(\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma.$$

La fonction de Green permet de résoudre simplement le problème de Dirichlet.

Exemple. Notons R le rayon de la sphère ; O son centre ; a, b, c les coordonnées du point P situé à l'intérieur de la sphère ; l la distance OP : $l' = OP'$, où P' est le point conjugué de P, harmonique par rapport aux extrémités du diamètre OP (fig. 160)

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{OP}\frac{1}{r'}.$$

La fonction de Green de la sphère s'écrit comme suit :

$$G = \frac{R}{OP}\frac{1}{r'}.$$

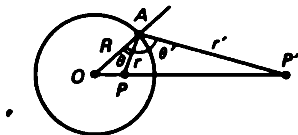


Fig. 160

La solution du problème de Dirichlet est donc

$$U(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi}\iint U\left(\frac{R}{l}\frac{\partial(1/r')}{\partial n} - \frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Or

$$\frac{\partial(1/r')}{\partial n} = \frac{1}{r'^2}\cos\theta', \quad \frac{\partial(1/r)}{\partial n} = \frac{1}{r^2}\cos\theta,$$

et

$$l^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta,$$
$$R^2 = l^2 + r^2 - 2rl\cos\theta', \quad l^2 - R^2 = r(-R\cos\theta + l\cos\theta').$$

On aura donc

$$\frac{R}{l}\frac{\cos\theta'}{r'^2} - \frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{R^2 - l^2}{Rr^3}.$$

D'où

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{R^2 - l^2}{r^3}U\,d\sigma.$$

§ 4. Energie totale

256. La fonction de force complète d'un système de n points matériels de masses m_i où la distance entre les points m_i et m_k est r_{ik} s'écrit comme suit :

$$W = \sum_{k=1}^{n} m_k\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i}{r_{ik}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_k\left(\sum_{1}^{n}\frac{m_i}{r_{ik}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_k U_k.$$

Par conséquent l'énergie totale d'un corps massif de masse volumique ϱ est égale à

$$W = \int \varrho\frac{U}{2}d\tau.$$

Le travail des forces d'attraction mutuelle produit lors de la déformation du corps est donné par la formule

$$\delta W = \int \frac{\delta\varrho U + \varrho\delta U}{2}d\tau.$$

257. Formule de Poincaré. Si U et V sont deux fonctions continues dans le volume T délimité par la surface S, on a

$$\iint_S U \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma = \iiint_T U \Delta V d\tau + \iiint_T \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau.$$

Si U et V désignent les potentiels de masses finies, à l'infini ($R \to \infty$) U et V seront de l'ordre de $1/R$ et leurs dérivées premières seront de l'ordre de $1/R^2$. Dans ces conditions on pourra appliquer la formule de Green dans la région T' comprise entre la surface S et une sphère de rayon infiniment grand R. L'intégrale $\iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$ étendue à cette dernière sphère pour $R \to \infty$ étant égale à zéro, on a

$$\iint_S U \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma = \iiint_{T'} U \Delta V d\tau + \iiint_{T'} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau.$$

En additionnant ces deux formules on obtient

$$\iiint U \Delta V d\tau + \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

où l'intégration est étendue à tout l'espace. En permutant U et V il vient

$$\iiint (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = 0,$$

ou, en tenant compte des équations de Poisson $\Delta U = -4\pi\varrho$ et $\Delta V = -4\pi\varrho'$, on obtient

$$\iiint (\varrho V - \varrho' U) d\tau = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Soit U le potentiel d'un corps K faiblement déformé pour lequel

$$V = U + \delta U, \quad \varrho' = \varrho + \delta\varrho.$$

En appliquant la formule précédente il vient

$$\iiint (\varrho \delta U - U \delta\varrho) d\tau = 0.$$

Problèmes

1. Démontrer que

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

2. Démontrer que

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint U \,\delta\varrho \, d\tau = \iiint \frac{1}{2} \varrho \delta U \, d\tau.$$

3. Un corps homogène incompressible de masse volumique ϱ est soumis à déformation ; notons ζ le segment de la normale extérieure à S compris entre la surface S non déformée et la surface S' délimitant le corps infiniment peu déformé. Démontrer que $\delta W = \iint \varrho U \zeta \, d\sigma$.

4. Montrer que dans le cas où le milieu est incompressible et homogène, l'extrémum de W correspond à un corps à la surface duquel le potentiel U est constant.

5. Montrer que l'énergie totale W d'un corps fini, homogène et incompressible possède une limite supérieure. Montrer que dans le cas d'une symétrisation selon Steiner l'énergie totale augmente et que W a un maximum pour une boule.

I. ANALOGIE EXISTANT ENTRE LA MÉCANIQUE ET L'OPTIQUE

La plupart des résultats qui ont été établis en dynamique après Lagrange sont liés aux analogies existant entre la mécanique et l'optique. Cette analogie fut mise en évidence par Hamilton (1824)*).

1. Huygens fonda la théorie ondulatoire de la lumière sur le principe suivant. En notant Σ le front d'onde lumineuse à l'instant t (fig. 161) tout point P de ce front doit être considéré comme la source d'une onde secondaire, et le front d'onde Σ' à l'instant t' ($t' > t$) est l'enveloppe de ces ondes secondaires.

Hamilton établit la formulation analytique de ce théorème de Huygens.

Pour un milieu isotrope le temps que met la lumière pour aller d'un point $P(x, y, z)$ à un point $P'(x', y', z')$ ne dépend que de leurs coordonnées :

$$t' - t = V(x, y, z, x', y', z') ;$$

Hamilton dénomma *V fonction caractéristique.*

Soient Σ le front d'onde à l'instant t ; Σ' le front d'onde à un instant ultérieur t'; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'onde Σ au point P ; α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale à Σ' au point P'.

Selon le principe de Huygens, le front Σ' est l'enveloppe des ondes secondaires émises à l'instant t par les différents points P du front Σ. L'équation de l'onde secondaire issue à l'instant t du point (x, y, z) sera à l'instant t'

$$t' - t = V(x, y, z, x', y', z'),$$

où x', y', z' désignent les coordonnées courantes. Pour trouver l'enveloppe des ondes secondaires il faut éliminer entre leurs équations les paramètres x, y, z. On obtient ainsi la relation

$$\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = 0$$

---

*) Hamilton W. R. *Transactions of Royal Irish Academy*, 1828, V. 15, p. 69 ; 1833, V. 16, p. 4, 93 ; 1837, V. 17, p. 1.

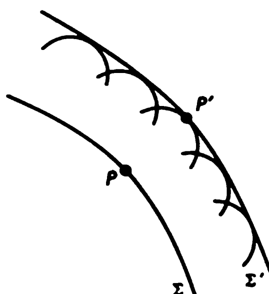


Fig. 161

quels que soient les déplacements δx, δy, δz sur le front Σ qui sont orthogonaux à leurs normales :

$$\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z = 0.$$

Il résulte de ces deux relations

$$\frac{\partial V/\partial x}{\alpha} = \frac{\partial V/\partial y}{\beta} = \frac{\partial V/\partial z}{\gamma} = x \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \qquad (1)$$

Le rapport général x ne dépend que de x, y, z. Faisons correspondre au point (x, y, z) un point (x', y', z') de l'onde secondaire σ situé sur l'enveloppe Σ' des ondes secondaires, i.e. le point P' où la normale à l'onde secondaire σ coïncide avec la normale au front Σ'; la condition du parallélisme de ces normales s'écrit .

$$\frac{\partial V/\partial x'}{\alpha'} = \frac{\partial V/\partial y'}{\beta'} = \frac{\partial V/\partial z'}{\gamma'} = \lambda \quad (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1)\ ; \qquad (2)$$

le rapport général λ ne dépend que de x', y', z'. La succession des points (x', y', z') ainsi construits aux différents instants t' est appelée *rayon lumineux*.

La forme identique des relations (1) et (2) démontre le principe d'inversion, c.-à-d. que le mouvement rétrograde de l'onde Σ' vers l'onde Σ peut être également décrit conformément au principe de Huygens et que si la fonction caractéristique est symétrique $V(x, y, z, x', y', z') = V(x', y', z', x, y, z)$, le mouvement rétrograde peut être également décrit selon le principe de Huygens comme une onde directe issue d'un point du front Σ' mais dirigée en sens opposé.

La différentielle totale de la fonction caractéristique V est

$$dV = x(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) + \lambda(\alpha'\, dx' + \beta'\, dy' + \gamma'\, dz'). \qquad (3)$$

Pour mettre en évidence la signification des rapports x et λ notons μ la quantité inverse de la vitesse v de la lumière au point (x, y, z) et μ' la même quantité au point (x', y', z'). Lors d'un déplacement (dx, dy, dz) du point P dans le sens positif du rayon lumineux à une distance ds et lors du déplacement (dx', dy', dz') du point P' le long du rayon lumineux à une distance ds' on aura

$$dV = dt' - dt = \frac{ds'}{v'} - \frac{ds}{v} = \mu' ds' - \mu ds =$$
$$\mu'(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)ds' - \mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)ds =$$
$$\mu'(\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz') - \mu(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz).$$

En identifiant avec la formule (3) on obtient $\lambda = \mu'$, $x = -\mu$. Si on utilise à la place des cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les nouvelles variables

$$\xi = \mu\alpha, \quad \eta = \mu\beta, \quad \zeta = \mu\gamma, \quad \xi' = \mu'\alpha', \quad \eta' = \mu'\beta', \quad \zeta' = \mu'\gamma',$$

après substitution des valeurs de λ et x dans (3) on s'assure que les variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ et $x', y', z', \xi', \eta', \zeta'$ qui sont liées par les formules 1 et 2 satisfont à la condition de la transformation canonique ou de contact qui s'applique aux dérivées $dx, dy, dz, dx', dy', dz'$

$$dV = \xi' dx' + \eta' dy' + \zeta' dz' - (\xi dx + \eta dy + \zeta dz).$$

2. L'existence d'une analogie entre deux phénomènes se traduit par la coïncidence de leurs groupes de transformations ou par l'identité des équations différentielles décrivant les phénomènes.

Pour un système mécanique assujetti à des liaisons holonomes et soumis à l'action de forces dérivant d'une fonction de force U, l'action

$$V(t, q_1, \ldots, q_k, q_1^0, \ldots, q_k^0) = \int_{t_0}^{t} (T + U)dt$$

doit vérifier la relation

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0. \tag{4}$$

Cette relation permet de conclure que la transformation entre q_i, p_i et leurs valeurs initiales q_i^0, p_i^0 constitue un groupe de transformations canoniques ou de contact ; le rôle de fonctions caractéristiques est assumé par l'action.

Comme nous pouvons choisir arbitrairement les instants t_0 et t, nous pouvons considérer le mouvement d'un système mécanique conservatif holonome comme une succession de transformations de contact ou canoniques.

Il s'ensuit que le groupe de mouvements du système holonome considéré est identique au groupe de propagation de la lumière dans un milieu isotrope conforme à la théorie ondulatoire de Huygens. C'est en cela que réside l'essence de l'analogie entre la mécanique et l'optique qu'établit Hamilton.

Il convient de noter l'importance fondamentale de la relation (4). Supposons que l'instant t est infiniment proche de l'instant $t_0 : t = t_0 + dt$. L'action sera alors égale à $V = (T + U)dt$ et aux quantités de second ordre près par rapport à dt on pourra écrire

$$q_i^0 = q_i - \frac{dq_i}{dt}dt + \ldots, \quad p_i^0 = p_i - \frac{dp_i}{dt}dt + \ldots$$

La relation (4) fournit au même degré de précision

$$\delta(T + U)dt = \sum\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i + p_i\delta\frac{dq_i}{dt}\right)dt + \ldots$$

En divisant par dt et passant à la limite $dt \to 0$ on obtient une égalité exacte

$$\sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt}\right)\delta q_i + \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{dq_i}{dt}\right)\delta p_i = 0, \tag{5}$$

où $H = \sum p_i q_i' - T - U$. Comme l'égalité (5) doit être valable quels que soient δq_i, δp_i, il en découle les équations de mouvement canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Le fait qu'il est possible de déduire les équations de mouvement de la relation (4) permet de conclure que l'analogie entre la mécanique et l'optique se manifeste non seulement dans certaines propriétés du mouvement d'un système mécanique, mais représente un principe indépendant de la dynamique, contrôlant complètement les mouvements d'un système mécanique holonome soumis à l'action de forces dérivant d'une fonction de force.

Le principe de Hamilton (4) traduisant en une construction géométrique de la trajectoire le principe ondulatoire de Huygens permet, mieux que tout autre principe de dynamique, de justifier les méthodes d'intégration des équations différentielles de mouvement du point de vue général.

On connaît l'action relative à un intervalle de temps infiniment court dt ; la construction correspondante des ondes secondaires ne fait qu'esquisser la tendance de variation du front d'onde Σ donné.

Si on connaît l'action V relative à tout l'intervalle de temps, la construction des ondes secondaires pourra être faite pour tout cet intervalle de temps et le problème de la détermination de la trajectoire ne présente aucune difficulté de principe, comme l'implique le principe (4). En effet, en explicitant

l'expression δV et en identifiant les termes contenant δq_i et δq_i^0 on obtient

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad -p_i^0 = \frac{\partial V}{\partial q_i^0}. \tag{6}$$

Ce système d'équations détermine la trajectoire.

3. Les transformations de contact ou canoniques jouissent d'une propriété intéressante facilitant l'intégration des équations de la dynamique. Remplaçons les anciennes variables q_i, p_i par de nouvelles variables α_i, β_i satisfaisant à la condition de la transformation de contact

$$\sum p_i \delta q_i - \sum \beta_i \delta \alpha_i = \delta W,$$

ou encore

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad -\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \tag{7}$$

où la fonction caractéristique $W(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est supposée être une fonction univoque du temps t et des variables $q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Le principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum p_s dq_s - H\, dt\right) = 0$$

s'écrit avec les nouvelles variables α_i, β_i sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \beta_s d\alpha_s - H^*\, dt\right) = 0,$$

où la nouvelle fonction $H^* = \frac{\partial W}{\partial t} + H$ est exprimée en termes de t et des nouvelles variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ puisque

$$\sum p_s dq_s = \sum \beta_s d\alpha_s + dW - \frac{\partial W}{\partial t} dt$$

et pour des positions données du système aux instants t_0 et t_1 (les bornes étant fixes dans le principe variationnel de Hamilton)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dW = \delta(W_1 - W_0) = 0.$$

Les équations différentielles décrivant les mouvements du système mécanique écrites en termes des nouvelles variables ont une forme canonique

puisque le principe de la moindre action s'exprime sous la même forme qu'avec les anciennes variables

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

La forme de ces équations est particulièrement simple lorsque la fonction H^* est égale à zéro ; dans ce cas la fonction caractéristique de transformation W doit vérifier non seulement les relations (7) mais encore l'égalité

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$$

ou l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0. \tag{9}$$

Mais W doit dépendre essentiellement des quantités $q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ce qui entraîne que W doit être une intégrale complète de l'équation (9). Ces différentes remarques se résument dans l'énoncé du théorème de Jacobi. *Si $W(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre* (9), *la solution du problème de la dynamique sera déterminée par les relations* (7) *où, selon* (8), *les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des constantes.*

4. Dans de nombreux problèmes de dynamique le calcul de l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi (9) peut être facilité en utilisant la substitution d'Imchénetski*).

5. Afin de faciliter la résolution des problèmes de dynamique Lagrange élabora une méthode approchée générale fondée sur la variation de constantes arbitraires**).

Les difficultés que présente l'intégration des équations du mouvement rendent nécessaire le calcul approché.

Toute approximation implique la résolution exacte du problème lorsqu'on néglige entre les équations certaines quantités supposées petites mais où l'on conserve les forces principales s'exerçant sur le système. On corrige ensuite cette approximation en tenant successivement compte des quantités négligées.

Soit un système mécanique assujetti à des liaisons holonomes lisses et soumis à l'action de forces dérivant d'une fonction de force. Soient q_s, p_s ses coordonnées et ses impulsions, T la force vive, H_0 la fonction de Hamilton

---

*) Cf. ch. VII, p. 246.

**) Voir Dynamique, section 5 dans : Lagrange L. *Mécanique analytique*, Paris, 1788.

relative à l'action des forces principales dérivant de la fonction de force U, W la fonction de force des forces perturbatrices ou des forces négligées dans l'approximation utilisée.

On supposera que la solution approchée a été déterminée à l'aide des formules de transformation *de contact*

$$\sum p_s \delta q_s - \sum \beta_s \delta \alpha_s = \delta V \tag{10}$$

dont la fonction caractéristique $V(t, q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ est l'intégrale complète de l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0\left(t, q_1, ..., q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \tag{11}$$

On peut poser maintenant le problème suivant: remplacer α_j, β_j (qui sont des constantes dans le mouvement approché défini par H_0) par des fonctions du temps telles qu'en les substituant dans les solutions du mouvement non perturbé

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}, \quad -\beta_s = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} \tag{12}$$

on obtiendra les solutions du mouvement perturbé.

Ce problème a été résolu par Lagrange. Les équations différentielles décrivant les mouvements d'un système mécanique en présence de forces perturbatrices dérivant d'une fonction de force W se laissent déterminer à l'aide du principe de la moindre action

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum p_s dq_s - (H_0 - W)dt\right] = 0.$$

Passons aux nouvelles variables α_j, β_j à l'aide des formules de transformation de contact (10) :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \beta_j d\alpha_j - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 - W\right)dt\right] = 0.$$

Conformément à (11) on en tire

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \beta_j d\alpha_j + W dt\right] = 0$$

ou encore

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \beta_j}, \quad \frac{d\beta_j}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, ..., n), \tag{13}$$

où on a remplacé dans la fonction W les variables q_s, p_s par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables α_j, β_j données par les formules (12).

Les équations (13) sont les équations fondamentales de Lagrange de la théorie des perturbations.

Questions. Quand peut-on se contenter de la première approximation sans que l'erreur cesse d'être acceptable ? Dans quelles conditions α_j et β_j varieront-ils de façon stable ?

6. Pour les systèmes mécaniques holonomes soumis à l'action de forces dérivant d'une fonction de force, Poincaré*) a établi les équations du mouvement perturbé dans le cas où les perturbations sont dues à de petits écarts des valeurs initiales des coordonnées q_s et des impulsions p_s.

Posons que H désigne la fonction de Hamilton d'un tel système mécanique. Parmi les différents mouvements du système choisissons un que nous considérerons comme le mouvement dominant ou non perturbé et qui est décrit par la solution particulière

$$q_s = q_s(t), \quad p_s = p_s(t)$$

des équations du mouvement

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{14}$$

Considérons un mouvement peu différent du mouvement dominant et dont les coordonnées et les impulsions seront écrites sous la forme

$$q_s = q_s(t) + \xi_s, \quad p_s = p_s(t) + \eta_s,$$

où ξ_s, η_s désignent des écarts ou des variations des coordonnées et des impulsions. Le mouvement perturbé est le mouvement du système mécanique qui possède au départ des valeurs différentes de q_s et p_s mais qui s'effectue sous l'action des mêmes forces agissantes ; il s'ensuit que ses coordonnées et ses impulsions doivent vérifier les équations (14) :

$$\frac{d[q_i(t) + \xi_i]}{dt} = \frac{\partial H(t, q_s(t) + \xi_s, p_s(t) + \eta_s)}{\partial p_i},$$

$$\frac{d[p_i(t) + \eta_i]}{dt} = -\frac{\partial H(t, q_s(t) + \xi_s, p_s(t) + \eta_s)}{\partial q_i}.$$

En développant les seconds membres en séries de Taylor suivant les petites valeurs de ξ_s, η_s et en utilisant (14) on obtient en première approximation

*) Poincaré H. *Sur le problème de trois corps.* Acta math., 1890, v. 13, p. 1-270.

les équations aux variations de Poincaré :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_s \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_s} \xi_s + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_s} \eta_s \right),$$
$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_s \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_s} \xi_s + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_s} \eta_s \right). \qquad (15)$$

Ces équations aux variations jouissent de propriétés qui sont en étroite liaison avec l'analogie optico-mécanique de Hamilton.

Si ξ_s, η_s et ξ_s', η_s' sont deux solutions des équations aux variations (15), on a

$$\sum (\xi_s \eta_s' - \xi_s' \eta_s) = \text{const.} \qquad (16)$$

On démontre cette proposition en différentiant directement par rapport à t :

$$\frac{d}{dt} \sum (\xi_s \eta_s' - \xi_s' \eta_s) = \dots = 0.$$

Cette proposition remonte à Lagrange *).

En restant dans le cadre de la pensée de Lagrange on peut fort bien retrouver les équations aux variations (15). En effet, si on porte la solution générale des équations (14), qui dépend de $2n$ constantes, dans les équations (14), on obtiendra une identité indépendante des valeurs numériques de ces constantes. On peut différentier cette identité par rapport aux constantes. En différentiant une fois et en notant ξ_s les différentielles des coordonnées et η_s les différentielles des impulsions on obtiendra les équations aux variations (15).

(On met en évidence le lien entre l'invariant (16) et l'analogie optico-mécanique en remarquant que le premier membre de (16) est une autre expression du covariant bilinéaire du principe d'analogie de Hamilton

$$\sum [\Delta p_s \delta q_s - \Delta q_s \delta p_s].$$

On reviendra sur cette question plus tard.)

L'invariant (16) démontre que les solutions des équations aux variations sont liées entre elles. C'est ce qui permet dans certains cas de trouver simplement de nouvelles intégrales ou de nouvelles solutions.

A l'aide d'une différentiation on démontre la proposition suivante : si les équations aux variations (15) possèdent une intégrale linéaire

$$\sum (A_s \xi_s + B_s \eta_s) = \text{const},$$

---

*) L. Lagrange. *Mécanique analytique*, Paris, 1788.

ces équations possèdent la solution particulière suivante :

$$\xi_s' = -B_s, \quad \eta_s' = A_s.$$

Si $\varphi(t, q_s, p_s) = \text{const}$ est l'intégrale des équations canoniques (14), l'expression

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \eta_s \right) = \text{const}$$

sera l'intégrale linéaire des équations aux variations (15) et

$$\xi_s' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}, \quad \eta_s' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_s}$$

sera une solution particulière des équations (15).

Il s'ensuit que si $\varphi(t, q_s, p_s) = a$, $\psi(t, q_s, p_s) = b$ sont deux intégrales des équations canoniques de mouvement (14), les équations aux variations auront pour solutions particulières

$$\xi_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}, \quad \eta_s = \frac{\partial \varphi}{\partial q_s}, \quad \xi_s' = -\frac{\partial \psi}{\partial p_s}, \quad \eta_s' = \frac{\partial \psi}{\partial q_s}.$$

En portant ces solutions particulières dans l'invariant (16) on constatera que l'expression

$$(\varphi, \psi) = \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} - \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \right) = \text{const}$$

est l'intégrale des équations canoniques. Ce théorème a été formulé par Poisson.

Dans sa « Mécanique analytique » (tome 1, section 5, paragraphe 8), Lagrange nota que les principales applications de l'invariant (16) concernent les problèmes d'intégration approchée lorsqu'on se trouve en présence de forces perturbatrices dérivant d'une fonction de force W.

Supposons que le mouvement perturbé

$$q_s = q_s(t) + \xi_s, \quad p_s = p_s(t) + \eta_s$$

décrit le mouvement d'un système soumis à l'action de forces perturbatrices dérivant d'une fonction de force W :

$$\frac{d[q_s(t) + \xi_s]}{dt} = \frac{\partial \{H(t, q_s(t) + \xi_s, p_s(t) + \eta_s) - W(q_s(t) + \xi_s)\}}{\partial p_s},$$

$$\frac{d[p_s(t) + \eta_s]}{dt} = -\frac{\partial \{H(t, q_s(t) + \xi_s, p_s(t) + \eta_s) - W(q_s(t) + \xi_s)\}}{\partial q_s}.$$

En développant en une série de Taylor et en ne gardant que les termes linéaires on obtient

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta_j \right),$$

$$\frac{d\eta_s}{dt} = -\sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \eta_j \right) + \sum_j \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial W(q_s(t))}{\partial q_s}. \tag{17}$$

Soient $\xi_s, \eta_s, \xi_s', \eta_s'$ deux solutions particulières des équations (17). On aura alors

$$\frac{d}{dt} \sum (\xi_s \eta_s' - \xi_s' \eta_s) = \sum \Big\{ \eta_s' \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \xi_j + \eta_s' \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta_j - \xi_s \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j' -$$

$$\xi_s \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \eta_j' + \xi_s \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j' - \eta_s \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \xi_j' - \eta_s \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta_j' +$$

$$\xi_s' \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j + \xi_s' \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \eta_j - \xi_s' \frac{\partial^2 W}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j \Big\} + \sum (\xi_s - \xi_s') \frac{\partial W(q_s(t))}{\partial q_s},$$

ou

$$\frac{d}{dt} \sum (\xi_s \eta_s' - \eta_s \xi_s') = \sum (\xi_s - \xi_s') \frac{\partial W}{\partial q_s}.$$

7. Voyons comment on détermine l'action à l'aide de l'intégrale complète (dans le sens que donnait Lagrange à ce terme) figurant dans l'équation de Hamilton

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}, t\right) = 0.$$

Soit $f(q_1, \ldots, q_n, t, a_1, \ldots, a_n)$ l'intégrale complète. Utilisons la notation

$$S = f(q, t, a) - f(q^0, t_0, a),$$

où q^0, t_0 sont les valeurs initiales des variables et du temps. Supposons que

$$\frac{\partial S}{\partial a_r} = \frac{\partial f}{\partial a_r} - \frac{\partial f_0}{\partial a_r} = 0 \quad (r = 1, \ldots, n).$$

Ces équations permettent dans S d'éliminer $a_r = a_r(q, t, q^0, t_0)$. Nous aurons ainsi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = \frac{\partial f}{\partial q_r} + \sum \frac{\partial S}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial q_r} = \frac{\partial f}{\partial q_r},$$

ce qui montre que S en tant que fonction de q, t, q^0, t_0 vérifiera l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

8. Envisageons le système

$$\frac{\partial f}{\partial a_r} = \frac{\partial f_0}{\partial a_r} \tag{18}$$

en considérant les a_r comme des constantes arbitraires (selon le théorème de Jacobi $\frac{\partial f}{\partial a_r} = \beta_r$ et $\frac{\partial f_0}{\partial a_r}$ a la même signification) ; $f(q, t, a)$ étant une intégrale complète,

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial a_r \partial q_s} \right\|$$

est différent de zéro. Cela signifie que le système (18) peut être résolu et on peut obtenir

$$q_r = q_r(t, t_0, q^0, a). \tag{19}$$

On en tire

$$q_r^0 = q_r(t_0, t_0, q^0, a);$$

$p_r = \frac{\partial f}{\partial q_r}$ et par suite

$$p_r = p_r(t, t_0, q^0, a). \tag{20}$$

Les fonctions (19), (20) représentent la solution générale du problème de la mécanique lorsque les a_r sont arbitraires. Il résulte de (18) que

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial a_r \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial a_r \partial t} = 0, \tag{21}$$

mais on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + H(q, p, t) = 0, \quad p = \frac{\partial f}{\partial q}; \tag{22}$$

en différentiant (22) par rapport à a_r, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_r \partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial^2 f}{\partial a_r \partial q_s} = 0,$$

d'où

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}.$$

La relation (22) implique que

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial t} + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial t} + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s}.$$

Après différentiation de (22) par rapport à q_r, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0$$

et par suite

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

Par définition l'action est égale à

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(\sum p_r \frac{\partial H}{\partial p_r} - H\right) dt = \int_{t_0}^{t} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_r} \frac{dq_r}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt =$$

$$f(q, t, a) - f(q^0, t_0, a)\,; \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0.$$

9. Interprétation géométrique. $F = f(q, t, a)$ est une intégrale complète. Dans l'espace F, t, q l'intégrale définit un système de surfaces dépendant de $(n + 1)$ paramètres $a_1, \ldots; a_n, a_{n+1}$; cherchons une famille passant par le point $0, t_0, q^0$:

$$0 = f_0 + a_{n+1},$$

d'où

$$F = f(q, t, a) - f(q^0, t_0, a).$$

Cherchons l'*enveloppe* de cette famille

$$\frac{\partial f}{\partial a_r} - \frac{\partial f_0}{\partial a_r} = 0.$$

Après élimination de a on obtient la fonction d'action

$$F = S(q, t, t_0, q^0).$$

Posons que pour une certaine valeur de t

$$S = f - f_0 = \text{const}$$

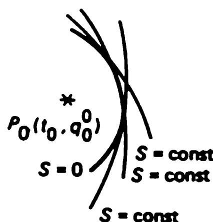


Fig. 162

(fig. 162). Le système de surfaces dépend des paramètres $a_1, ..., a_n$. Leur enveloppe est

$$\frac{\partial f}{\partial a_r} - \frac{\partial f_0}{\partial a_r} = 0.$$

L'enveloppe définit la fonction d'action

$$S = S(t, q, t_0, q^0) = \text{const.}$$

II. ÉQUATIONS DE POINCARÉ

1. Coordonnées déterminantes. Supposons qu'à tout instant t la position du système est déterminée par les valeurs des variables $q_1, ..., q_n$, c'est-à-dire

$$x_\nu = x_\nu(t, \quad q_1, ..., q_n), \; y_\nu = y_\nu(t, \quad q_1, ..., q_n), \; z_\nu = z_\nu(t, q_1, ..., q_n). \quad (1)$$

Ce type de coordonnées a été dénommé par Tchaplyguine *coordonnées déterminantes* et Appell les dénomma *coordonnées holonomes.*

Soit T la force vive calculée à l'aide des formules (1)

$$T = \sum \frac{m_\nu}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} q_s' \right)^2 + \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} q_s' \right)^2 + \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial t} + \sum \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} q_s' \right)^2 \right\}. \quad (2)$$

Il découle des formules (1)

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial x_\nu'}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}. \quad (3)$$

Des formules analogues existent pour y et z.

Le principe d'Euler-Lagrange donne

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right] \delta q_s = 0, \tag{4}$$

où

$$Q_s = \sum \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \right),$$

i.e. $Q_s \delta q_s$ représente le travail des forces appliquées sur un déplacement virtuel déterminé par la variation δq_s d'une variable q_s.

S'il existe parmi les déplacements virtuels un déplacement défini par les relations

$$\delta q_1 \neq 0,\ \delta q_2 = 0,\ \ldots,\ \delta q_n = 0, \tag{5}$$

l'application du principe (4) donne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1. \tag{6}$$

Si le travail fourni par les forces appliquées lors du déplacement (5) est nul ($Q_1 = 0$) et si lors de la variation de q_1 la force vive ne varie pas $\left(\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \right)$, l'équation (6) fournit l'intégrale première

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = \text{const.}$$

La coordonnée q_1 qui jouit de ces propriétés est dite *cyclique*. La proposition que nous venons de démontrer constitue une généralisation du théorème sur le mouvement du centre de gravité et du théorème sur le moment de la quantité de mouvement, car :

1° si q_1 détermine un mouvement de translation le long de l'axe x, on aura

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial y_\nu}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial z_\nu}{\partial q_1} = 0 ;$$

2° si q_1 désigne la rotation en bloc autour de l'axe z, on aura

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_1} = -y_\nu, \quad \frac{\partial y_\nu}{\partial q_1} = x_\nu, \quad \frac{\partial z_\nu}{\partial q_1} = 0.$$

Remarque. Il importe de bien remarquer que T doit être défini par la formule (2) et les relations (1). On ne peut prendre pour T n'importe quelle expression

$$T = T(t, q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n').$$

Les coordonnées $q_1, ..., q_n$ ne sont pas encore soumises aux conditions d'indépendance. La condition précédente exige qu'au moins l'une des dérivées

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}, \frac{\partial z_\nu}{\partial q_s} \quad (\nu = 1, ..., m)$$

ne s'annule pas pour la coordonnée déterminante q_s. Il serait donc erroné de déterminer la position sur un plan d'un point matériel de masse m à l'aide des coordonnées polaires $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ et de l'aire de secteur $q_3 = \sigma$, ainsi que de caractériser la force vive T de ce point par la formule

$$T = \frac{m}{2}\left(q_1'^2 + \frac{1}{2} q_1^2 q_2'^2 + \frac{1}{2}\frac{q_3'^2}{q_1^2}\right)$$

et d'écrire ensuite la relation (4).

2. Coordonnées déterminantes indépendantes ou coordonnées de Lagrange. Si $q_1, ..., q_n$ sont des coordonnées déterminantes et indépendantes, les résultats précédents permettent d'écrire le système complet d'équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, ..., n).$$

Intégrale d'énergie. La force vive est de la forme

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Supposons que les forces dérivent d'une fonction de force U:

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

Multiplions par q_s' les équations de Lagrange et sommons. Si T ne dépend pas explicitement du temps $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, on aura

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s'\right) - \left(\sum \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s'' + \frac{\partial T}{\partial q_s} q_s'\right) = \sum \frac{\partial U}{\partial q_s} q_s'$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) - \frac{d}{dt}(T_2 + T_1 + T_0) = \frac{dU}{dt}.$$

Après intégration on obtient l'intégrale des forces vives

$$T_2 - T_0 = U + h$$

sous une forme plus générale que celle donnée précédemment. Cette intégrale a été trouvée par Jacobi.

3. Coordonnées cycliques. Soit q_α les coordonnées cycliques

$$(L = T + U), \quad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = s + 1, ..., k).$$

On en tire les intégrales cycliques

$$\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = \beta_\alpha .$$

Routh a défini la fonction $R = L - \sum q'_\alpha \beta_\alpha$ qui, après élimination des vitesses cycliques à l'aide des intégrales cycliques, sera de la forme

$$R(t, q_1, ..., q_s, q'_1, ..., q'_s, \beta_{s+1}, ..., \beta_k).$$

En faisant varier les deux expressions de la fonction de Routh

$$\delta R = \sum \frac{\partial R}{\partial q_j}\delta q_j + \sum \frac{\partial R}{\partial q'_j}\delta q'_j + \sum \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}\delta \beta_\alpha ,$$

$$\delta R = \sum \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \sum \frac{\partial L}{\partial q'_j}\delta q''_j - \sum q'_\alpha \delta \beta_\alpha ,$$

on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial q'_j} = \frac{\partial R}{\partial q'_j}, \quad -q'_\alpha = \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} .$$

Le problème se trouve ramené à l'intégration des équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, ..., s)$$

et on trouve

$$q_\alpha = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} dt.$$

4. Les paramètres de Poincaré. Notons $x_1, ..., x_n$ les coordonnées déterminantes. On posera qu'à tout instant t elles déterminent la position du système mécanique considéré soumis aux liaisons holonomes :

$$\omega_j = \sum a_{js}\delta x_s = 0 \quad (j = k + 1, ..., n) ; \qquad (7)$$

la matrice $\| a_{js} \|$ possède au moins un déterminant d'ordre $n - k$ différent de zéro.

Si nous avons affaire à une forme

$$\omega_\delta = a_1 \delta x_1 + ... + a_n \delta x_n ,$$

on peut en dériver une nouvelle forme

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = \sum a_i(\delta\delta' x_i - \delta'\delta x_i) + \sum(\delta a_i \delta' x_i - \delta' a_i \delta x_i).$$

Supposons que les symboles de différentiation δ et δ' sont commutatifs :

$$\delta\delta' x_i = \delta'\delta x_i.$$

Le second membre de la formule précédente est appelé *covariant bilinéaire* de la forme ω_δ ou la dérivée extérieure ω_δ':

$$\omega_\delta' = \sum \begin{vmatrix} \delta a_i & \delta x_i \\ \delta' a_i & \delta' x_i \end{vmatrix} = \sum [\delta a_i, \delta x_i] = \sum \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)[\delta x_i, \delta x_j].$$

Dans la dernière somme les indices ne se répètent pas. Si $\omega_\delta' = 0$, ω_δ est une différentielle totale. La dérivée de la dérivée ω_δ' d'une forme ω_δ quelconque est identiquement nulle.

Considérons dans l'expression de ω le terme $a\delta x_1$. Dans l'expression de ω' lui correspond le terme $[\delta a, \delta x_1]$. Si a ne dépend que de x_1, ce terme est égal à zéro, mais si a ne dépend pas seulement de x_1, on peut prendre a pour x_2. La dérivée du terme $[\delta x_2, \delta x_1]$ est égale à zéro, car le coefficient est égal à 1.

Dans le cas de liaisons holonomes le système (7) doit être intégrable par définition. Pour que le système de Pfaff (7) soit complètement intégrable il faut que toutes les dérivées ω_j' disparaissent en vertu du système d'équations (7).

En effet, si on peut réduire le système (7) à la forme

$$\delta y_{k+1} = 0, \ldots, \delta y_n = 0,$$

cela signifie que les formes ω_j sont linéaires en $\delta y_{k+1}, \ldots, \delta y_n$:

$$\omega_j = A_{j,k+1}\delta y_{k+1} + \ldots + A_{j,n}\delta y_n, \quad \| A_{ji} \| \neq 0.$$

La dérivée

$$\omega_j' = \sum_{i=k+1}^{n} [\delta A_{ji}, \delta y_i]$$

sera donc nulle pour $\delta y_{k+1} = 0, \ldots, \delta y_n = 0$.

Pour prouver la proposition réciproque, écrivons le système (7) sous une forme différente:

$$\tilde{\omega}_{k+1} \equiv \beta_{k+1,k+1}\omega_{k+1} + \ldots + \beta_{k+1,n}\omega_n = 0,$$

....

$$\tilde{\omega}_n \equiv \beta_{n,k+1}\omega_{k+1} + \ldots + \beta_{n,n}\omega_n = 0,$$

$$\| \beta_{r,s} \| \neq 0.$$

On en tire

$$\tilde{\omega}'_\alpha = \beta_{\alpha,k+1}\omega'_{k+1} + \dots + \beta_{\alpha,n}\omega'_n + [\delta\beta_{\alpha,k+1},\omega_{k+1}] + \dots + [\delta\beta_{\alpha,n},\omega_n],$$

et on voit que si les ω'_α sont éliminés en vertu de $\omega_\alpha = 0$ ($\alpha = k + 1, \dots, n$), les $\tilde{\omega}$ seront éliminés en vertu de $\tilde{\omega}_\alpha = 0$. La propriété est indépendante du mode d'écriture.

Supposons que la proposition réciproque a été démontrée pour $(n - 1)$ variables, nous allons la démontrer pour les n variables. Selon notre hypothèse les ω_i', s'éliminant en vertu des équations (7), s'élimineront aussi si l'on pose $\delta x_n = 0$, i.e. si on considère x_n comme un paramètre fixe. Selon notre hypothèse, le système (7) se réduit alors à la forme

$$\delta y_{k+1} = 0, \dots, \delta y_n = 0,$$

où $y_{k+1}, \dots, y_n$ sont interprétés comme des fonctions de $x_1, \dots, x_{n-1}$. Si on ne considère pas x_n comme une constante, le système (7) prendra évidemment la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{k+1} &\equiv \delta y_{k+1} + b_{k+1}\delta x_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\omega}_n &\equiv \delta y_n + b_n \delta x_n = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

où les b_α sont les fonctions de $y_{k+1}, \dots, y_n$, par exemple $x_1, x_2, \dots, x_k$. Par suite

$$\tilde{\omega}'_{k+1} = [\delta b_{k+1}, \delta x_n], \dots, \tilde{\omega}'_n = [\delta b_n, \delta x_n],$$

et en vertu de (8)

$$\tilde{\omega}'_\alpha = \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_2}[\delta x_2, \delta x_n] + \dots + \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_k}[\delta x_k, \delta x_n].$$

La condition selon laquelle les $\tilde{\omega}_\alpha$ s'éliminent en vertu de (8) se réduit aux relations

$$\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_k} = 0,$$

ce qui montre que b_α ne dépend que de $y_{k+1}, \dots, y_n, x_n$. Cela permet d'écrire le système (8) sous la forme

$$\delta y_{k+1} = 0, \dots, \delta y_n = 0.$$

On a obtenu ainsi le *théorème de Frobenius* selon lequel *la condition nécessaire et suffisante pour que le système* (7) *soit intégrable se traduit par les égalités*

$$\delta y_{k+1} = 0, \dots, \delta y_n = 0.$$

Dans le cas où les liaisons sont décrites par les équations intégrables (7), on aura selon le théorème de Frobenius

$$[\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n, \omega'_\alpha] = 0 \quad (\alpha = k+1, \ldots, n). \tag{9}$$

L'équation

$$[F, f_1, f_2, \ldots, f_n] = 0,$$

où F est une forme extérieure, exprime la condition nécessaire et suffisante pour que F s'élimine lorsque les variables vérifient les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_n = 0.$$

5. Choisissons k formes différentielles linéaires

$$\omega_i \equiv \sum a_{is}\delta x_s \quad (i = 1, \ldots, k),$$

qui sont indépendantes les unes des autres ainsi que par rapport aux formes $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$, ce qui implique

$$\| a_{ij} \| \neq 0 \quad (i, \quad j = 1, \ldots, n).$$

Le système

$$\omega_r = \sum a_{rs}\delta x_s \quad (r = 1, \ldots, n)$$

peut alors être résolu par rapport à δx_s:

$$\delta x_s = \sum \xi_s^{(r)} \omega_r;$$

on en tire

$$\delta f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_s} \delta x_s = \sum \xi_s^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_s} \omega_r = \sum_{r=1}^{n} \omega_r X_r f_s$$

avec

$$X_r f = \sum \xi_s^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Posons que δ désigne un déplacement virtuel lorsque les conditions relatives aux liaisons

$$\omega_{k+1} = 0, \ldots, \omega_n = 0 \tag{10}$$

sont satisfaites. Dans ce cas

$$\delta f = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha f.$$

Dans le cas des liaisons holonomes les intégrales premières du système (10) $y_{k+1}, \ldots, y_n$ satisfont aux conditions $\delta y_{k+1} = 0, \ldots, \delta y_n = 0$ quels que soient $\omega_1, \ldots, \omega_k$. On obtient alors pour $y_{k+1}, \ldots, y_n$ un système de k équations linéaires aux dérivées partielles

$$X_\alpha f = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k). \tag{11}$$

Ce système possède $n - k$ solutions indépendantes $y_{k+1}, \ldots, y_n$. Le système (11) est dit complet s'il possède $n - k$ solutions indépendantes. Pour tout système holonome intégrable (10) le système (11) est toujours complet.

Partant de la formule

$$\delta f = \sum_{j=1}^{n} \omega_j X_j f$$

et compte tenu de ce que

$$\delta(X_j, f) = \sum \omega_i X_i X_j f$$

on obtient

$$0 = \sum \omega_j' X_j f = \sum [\delta(X_j f), \omega_j] = \sum \omega_j' X_j f + \sum X_i X_j f [\omega_i, \omega_j].$$

Or on peut toujours exprimer n covariants ω_j' $(j = 1, \ldots, n)$ sous la forme $\omega_j' = -\sum_{r,s}^{*} c_{rsj}[\omega_r, \omega_s]$ ($\sum^*$ désigne une somme sans répétitions). Il s'ensuit

$$0 = -\sum^* c_{rsj}[\omega_r, \omega_s] X_j f + \sum^* (X_i, X_j) f [\omega_i, \omega_j] = \sum^* [\omega_r, \omega_s] \{(X_r, X_s) f - \sum c_{rsj} X_j f\},$$

où

$$(X_i, X_j) f = X_i(X_j f) - X_j(X_i f)$$

porte le nom de *commutateur.* Par conséquent

$$(X_r, X_s) f = \sum c_{rsj} X_j f.$$

Dans le cas de liaisons holonomes, le système $\omega_j = 0$ $(j = k + 1, \ldots, n)$ est parfaitement intégrable. Selon le théorème de Frobenius, les ω_j' $(j = k + 1, \ldots, n)$ doivent s'éliminer avec les ω_j. Cela signifie qu'il ne doit pas y avoir dans l'expression de ω_j' $(j = k + 1, \ldots, n)$ de termes ne comportant pas ω_j. En conséquence

$$c_{rsj} = 0 \ (j = k + 1, \ldots, n; \quad r, s = 1, \ldots, n).$$

On en conclut que X_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ constitue un système fermé en ce sens que

$$(X_\alpha X_\beta) f = \sum c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma f \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, k).$$

6. Propriétés d'un commutateur. Soient a, b des constantes ;

I. $(aX_\alpha + bX_\beta,\ X_\gamma)f = (aX_\alpha + bX_\beta)X_\gamma f - X_\gamma(aX_\alpha + bX_\beta)f = aX_\alpha X_\gamma f + bX_\beta X_\gamma f - aX_\gamma X_\alpha f - bX_\gamma X_\beta f = a(X_\alpha, X_\gamma)f + b(X_\beta, X_\gamma)f$;

II. $(X_\alpha, X_\beta) = -(X_\beta, X_\alpha)$;

III. $(X_\alpha, (X_\beta, X_\gamma)) + (X_\beta, (X_\gamma, X_\alpha)) + (X_\gamma, (X_\alpha, X_\beta)) = 0$.

Le système X_α $(\alpha = 1, ..., k)$ constitue un système fermé d'opérateurs linéaires infinitésimaux ou, usant de termes obsolètes, un groupe infinitésimal, dont le commutateur jouit des propriétés I, II, III. Par un choix convenable des formes auxiliaires $\omega_1, ..., \omega_k$ on simplifie ce système jusqu'au groupe infinitésimal de Lie (algèbre de Lie).

Supposons que dans le système définissant les liaisons

$$\omega_j \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta x_i = 0 \quad (j = k+1, ..., n),$$

$$\begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

on aura alors $\delta x_j = \sum_{\alpha=1}^{k} b_{j\alpha}\delta x_\alpha$.

En posant $\omega_\alpha \equiv \delta x_\alpha$ $(\alpha = 1, ..., k)$ on aura

$$\delta f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \sum_{j=k+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}b_{j\alpha}\right)\omega_\alpha,$$

et par suite

$$X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \sum_{j=k+1}^{n} b_{j\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (\alpha = 1, ..., k).$$

On en conclut que

$$(X_\alpha, X_\beta)f \equiv 0,$$

ce qui implique que pour tous les α, β, i

$$c_{\alpha\beta i} = 0 \quad (\alpha, \beta, i = 1, ..., k).$$

Le système d'opérateurs $X_\alpha f$ $(\alpha = 1, ..., k)$ forme un groupe infinitésimal du groupe de Lie. Pour alléger nous l'appellerons tout court groupe de Lie X_α $(\alpha = 1, ..., k)$.

Hypothèse. Dans ce qui suit on admettra que le groupe infinitésimal des déplacements virtuels $X_\alpha f$ $(\alpha = 1, ..., k)$ est un groupe infinitésimal du

groupe de Lie et est défini par ses constantes structurelles $c_{\alpha\beta i}$:

$$(X_\alpha, X_\beta)f = \sum c_{\alpha\beta i} X_i f \quad (\alpha, \beta, i = 1, \ldots, k).$$

La variation de f résultant d'un déplacement virtuel est donc déterminée par les paramètres ω_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ selon la formule

$$\delta f = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha f.$$

7. Déplacements réels. Les déplacements réels d'un système assujetti à des liaisons holonomes sont limités par les équations intégrables de Pfaff

$$\pi_j \equiv \sum_{s=1}^{n} a_{js} dx_s + a_j dt = 0 \quad (j = k + 1, \ldots, n).$$

Complétons ce système par les formes

$$\pi_\alpha = \sum a_{\alpha s} dx_s \quad (\alpha = 1, \ldots, k)$$

(les anciens ω_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ où on remplace δ par d) et $\pi_0 = dt$. En utilisant ce qui a été établi pour les déplacements virtuels on peut démontrer que pour les déplacements réels on doit avoir

1° $df = dt X_0 f + \sum \pi_\alpha X_\alpha f$

(où X_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ sont les opérateurs des déplacements virtuels);

2° l'ensemble

$$X_0 f, X_1 f, \ldots, X_k f$$

est fermé en ce sens que

$$(X_i, X_j)f = \sum c_{ijs} X_s f \quad (i, j, s = 0, 1, \ldots, k),$$

ce qui signifie qu'il s'agit d'un groupe infinitésimal ;

3° du fait que $X_1 f, \ldots, X_k f$ forment un groupe de Lie de déplacements virtuels et ne contiennent pas la dérivée $\partial f/\partial t$ et que

$$X_0 f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \beta_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

on conclut que $(X_0, X_\alpha)f$ ne contiendra pas $\partial f/\partial t$; par conséquent

$$c_{0\alpha 0} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k) ;$$

4° $X_1, \ldots, X_k$ constitue un sous-groupe de Lie du groupe infinitésimal X_0, $X_1, \ldots, X_k$ de déplacements réels.

Notons $\dfrac{\pi_\alpha}{dt} = \eta_\alpha$. Avec ces notations

$$\frac{df}{dt} = X_0 f + \sum_{\alpha=1}^{k} \eta_\alpha X_\alpha f.$$

Hypothèse. Dans ce qui suit nous admettrons que le groupe infinitésimal $X_0, X_1, ..., X_k$ est un groupe infinitésimal du groupe de Lie pour lequel tous les $c_{\alpha\beta\gamma}$ sont des constantes ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, ..., k$).

Exemple. Supposons que dans le système

$$\pi_j \equiv \sum a_{ji}dx_i + a_jdt = 0 \quad (j = k + 1, ..., n)$$

$$\begin{vmatrix} a_{k+1,\, k+1} & \dots & a_{k+1,\, n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n,\, k+1} & \dots & a_{n,\, n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

On aura alors

$$dx_j = \sum_{\alpha=1}^{k} b_{j\alpha}dx_\alpha + b_jdt \quad (j = k + 1, ..., n).$$

En posant $\pi_0 = dt$, $\pi_\alpha = dx_\alpha$ on aura

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f}{\partial t}dt =$$

$$\pi_0\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=k+1}^{n} b_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \pi_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \sum b_{j\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

et par suite

$$X_0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=k+1}^{n} b_j\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad X_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \sum_{j=k+1}^{n} b_{j\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$(\alpha = 1, ..., k).$$

On voit donc que tous les $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, ..., k)$. Si les liaisons sont holonomes et les opérateurs d et δ sont commutatifs, $\delta df = d\delta f$. On aura aussitôt

$$0 = d(\sum \omega_\alpha X_\alpha f) - \delta(X_0f + \sum \eta_\alpha X_\alpha f)dt =$$
$$\sum(d\omega_\alpha - \delta\eta_\alpha dt)X_\alpha f + \sum \omega_\alpha(dtX_0X_\alpha f + \sum \eta_\beta X_\beta X_\alpha f dt) -$$
$$\sum \omega_\alpha X_\alpha X_0 f dt - \sum \eta_\alpha \sum \omega_\beta X_\beta X_\alpha f dt =$$
$$\sum(d\omega_\alpha - \delta\eta_\alpha dt)X_\alpha f + \sum \omega_\alpha dt(X_0X_\alpha - X_\alpha X_0)f +$$
$$\sum \omega_\alpha\eta_\beta(X_\beta X_\alpha - X_\alpha X_\beta) = \sum(d\omega_\alpha - \delta y_\alpha dt)X_\alpha f + \sum \omega_\alpha\eta_\beta c_{\beta\alpha i}X_i f dt +$$
$$\sum \omega_\alpha dt c_{0\alpha\beta}X_\beta f = dt\left\{\sum X_i f\left[\frac{d\omega_i}{dt} - \delta\eta_i + \sum c_{\beta\alpha i}\eta_\beta\omega_\alpha + \sum c_{0\alpha i}\omega_\alpha\right]\right\}.$$

f étant arbitraire

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \delta\eta_i - \sum c_{\beta\alpha i}\eta_\beta\omega_\alpha - \sum c_{0\alpha i}\omega_\alpha.$$

8. Equations du mouvement. Les coordonnées rectangulaires d'un point du système matériel sont $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, $w(t, x_1, \ldots, x_n)$, la masse du point matériel est m. Posons pour simplifier que les forces appliquées dérivent d'une fonction de force. Le principe d'Euler-Lagrange est

$$\sum m\left(\frac{d^2u}{dt^2}\delta u + \frac{d^2v}{dt^2}\delta v + \frac{d^2w}{dt^2}\delta w\right) = \delta U,$$

mais comme

$$\delta f = \sum \omega_\alpha X_\alpha f,$$

il s'écrira sous la forme

$$\sum \omega_\alpha \left\{\sum m\left(\frac{d^2u}{dt^2}X_\alpha u + \frac{d^2v}{dt^2}X_\alpha v + \frac{d^2w}{dt^2}X_\alpha w\right) - X_\alpha U\right\} = 0.$$

Cette expression doit être valable quelles que soient les valeurs numériques de ω_α. Par conséquent

$$\sum m\left(\frac{d^2u}{dt^2}X_\alpha u + \frac{d^2v}{dt^2}X_\alpha v + \frac{d^2w}{dt^2}X_\alpha w\right) = X_\alpha U,$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{du}{dt}X_\alpha u + \frac{dv}{dt}X_\alpha v + \frac{dw}{dt}X_\alpha w\right) -$$
$$\sum m\left(\frac{du}{dt}\frac{dX_\alpha u}{dt} + \frac{dv}{dt}\frac{dX_\alpha v}{dt} + \frac{dw}{dt}\frac{dX_\alpha w}{dt}\right) = X_\alpha U, \quad (12)$$

et puisque

$$\frac{du}{dt} = u' = X_0 u + \sum \eta_\alpha X_\alpha u,$$

on aura $\dfrac{\partial u'}{\partial \eta_\alpha} = X_\alpha u,$

$$X_i(u') = X_i(X_0 u + \sum \eta_\alpha X_\alpha u) = X_i(X_0 u) + \sum \eta_\alpha X_i X_\alpha u =$$
$$X_0(X_i u) + \sum c_{i0\beta} X_\beta u + \sum \eta_\alpha X_\alpha X_i u + \sum \eta_\alpha c_{i\alpha\beta} X_\beta u =$$
$$\frac{dX_i(u)}{dt} + \sum c_{i\alpha\beta}\eta_\alpha X_\beta u + \sum c_{i0\beta} X_\beta u.$$

Des expressions analogues existent pour v, w, ce qui permet de transformer la formule (12) :

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(u'\frac{\partial u'}{\partial \eta_\alpha} + v'\frac{\partial v'}{\partial \eta_\alpha} + w'\frac{\partial w'}{\partial \eta_\alpha}\right) -$$

$$\sum m\Bigg[u'\left(X_\alpha u' - \sum c_{\alpha i\beta}\eta_i X_\beta u\frac{\partial u'}{\partial \eta_\beta} - \sum c_{0i\beta}\frac{\partial u'}{\partial \eta_\beta}\right) +$$

$$v'\left(X_\alpha v' - \sum c_{\alpha i\beta}\eta_i X_\beta v\frac{\partial v'}{\partial \eta_\beta} - \sum c_{0i\beta}\frac{\partial v'}{\partial \eta_\beta}\right) +$$

$$w'\left(X_\alpha w' - \sum c_{\alpha i\beta}\eta_i X_\beta w\frac{\partial w'}{\partial \eta_\beta} - \sum c_{0i\beta}\frac{\partial w'}{\partial \eta_\beta}\right)\Bigg] = X_\alpha U.$$

Considérons la force vive du système

$$T = \sum \frac{m}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

L'égalité précédente s'écrira maintenant

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\right) - X_\alpha T + \sum c_{\alpha i\beta}\eta_i\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0i\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} = X_\alpha U,$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\right) = \sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0i\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + X_i(T + U) \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Ces équations portent le nom d'équations de Poincaré. Elles ont été établies pour le cas $X_0 = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ et $c_{0\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, k)$*).

Les équations de Poincaré s'appliquent au groupe infinitésimal X_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ pour lequel les $c_{\alpha i\beta}$ peuvent être variables. Cette remarque a été formulée par P. Chirokov lors de la discussion qui suivit ma conférence. Nous supposerons que X_α est un groupe infinitésimal du groupe de Lie pour lequel les $c_{\alpha i\beta}$ sont des constantes structurelles.

On doit remarquer que les équations de Poincaré ont été établies sans recours aux relations impliquant la commutativité de d et δ. (Dans la publication de Poincaré un errata concerne les indices $c_{\alpha i\beta}$). Les équations de Lagrange de second ordre sont un cas particulier des équations de Poincaré.

---

*) Poincaré H. *Comptes-rendus*, 1901, v. 132, p. 369. Poincaré H. *Sur la précession des corps déformables*. Bull. astronomique, 1910. Tchétaev N. *Comptes-rendus*, 1927, v. 185, pp. 1577-1578. Tchétaev N. Doklady A. S. U.R.S.S., 1928, n°7, pp. 103-104. Tchétaev N. PMM, 1941, t. 5, n°2, pp. 253-262 (*Stabilité du mouvement. Recherches sur la mécanique analytique*, Moscou, Ed. A.S. U.R.S.S., 1962, pp. 197-210).

Exemple 1. Montrons que les équations d'Euler relatives au mouvement d'un solide à point fixe découlent des équations de Poincaré. Soient x, y, z les axes de coordonnées fixes, ω_1, ω_2, ω_3 les paramètres des déplacements virtuels. D'après les formules d'Euler

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$\delta x = \omega_2 z - \omega_3 y, \quad \delta y = \omega_3 x - \omega_1 z, \quad \delta z = \omega_1 y - \omega_2 x,$$

$$\delta f = \sum \frac{\partial f}{\partial x}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \sum \frac{\partial f}{\partial y}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \sum \frac{\partial f}{\partial z}(\omega_1 y - \omega_2 x) =$$

$$\omega_1 \sum \left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \omega_2 \sum \left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \omega_3 \sum \left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$Xf = \sum \left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad Yf = \sum \left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$Zf = \sum \left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$(X, Y)f = \sum \left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sum \left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right) -$$

$$\sum \left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right) \sum \left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \sum \left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -Zf.$$

On trouve de même

$$(Y, Z) = -X, \quad (Z, X) = -Y;$$

$c_{123} = -1$, $c_{231} = -1$, $c_{312} = -1$, $c_{213} = 1$, $c_{321} = 1$, $c_{132} = 1$, p, q, r sont les projections de la vitesse de rotation absolue du solide sur les axes fixes x, y, z. D'après le théorème d'Euler et conformément au choix de ω_1, ω_2, ω_3 on a

$$\eta_1 = p, \quad \eta_2 = q, \quad \eta_3 = r.$$

Pour $i = 1$ l'équation de Poincaré s'écrit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = c_{213}\eta_2 \frac{\partial T}{\partial \eta_3} + c_{312}\eta_3 \frac{\partial T}{\partial \eta_2} + X(T + U),$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + X(T + U).$$

Dans le cas général

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

$$Xf = \sum \left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned}
XA &= X\sum m(y^2 + z^2) = 2\sum m(yz - zy) = 0,\\
XB &= X\sum m(z^2 + x^2) = 2\sum myz = 2D,\\
XC &= X\sum m(x^2 + y^2) = -2\sum mzy = -2D,\\
XD &= X\sum myz = \sum m(y^2 - z^2) = C - B,\\
XE &= X\sum mzx = \sum myx = F,\\
XF &= X\sum mxy = -\sum mzx = -E,
\end{aligned}$$

$$q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + X(T) = q(Cr - Dq - Ep) - r(Bq - Dr - Fp) +$$
$$Dq^2 - Dr^2 - (C - B)qr - Frp + Epq = 0.$$

L'équation de Poincaré se réduit donc à la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = XU.$$

La même chose vaut pour les autres axes. C'est l'expression du théorème sur le moment de la quantité de mouvement

$$\sigma_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \sigma_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \sigma_z = \frac{\partial T}{\partial z}$$

puisque

$$XU, YU, ZU$$

sont les moments des forces appliquées par rapport aux axes.

Exemple 2. Soient x, y, z les axes mobiles liés au corps solide et dont l'origine se trouve au point fixe (fig. 163); p, q, r les projections de la vitesse de rotation absolue du solide sur les axes mobiles. Les coordonnées x, y, z des différents points du solide ne varient pas et ne déterminent pas les positions du solide dans l'espace fixe. La position du solide est déterminée par les cosinus des angles β_i^k entre l'axe fixe $\bar{x}_i$ et l'axe mobile x_k. On utilise ici la notation usuelle $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Les axes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont fixes. On a

$$\sum \beta_\alpha^k \beta_\alpha^s = \delta_{ks}, \quad \sum \beta_k^\alpha \beta_s^\alpha = \delta_{ks}. \tag{13}$$

En posant

$$p_{ks} = \sum \beta_\alpha^k \frac{d\beta_\alpha^s}{dt},$$

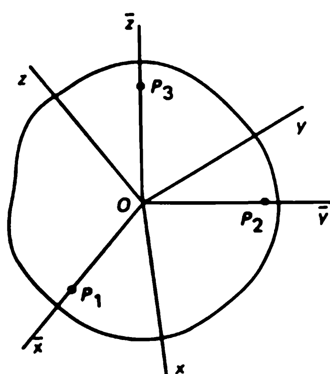


Fig. 163

on a

$$p_{ks} = -p_{sk}$$

puisque l'on déduit de (12)

$$\sum \beta_\alpha^k \frac{d\beta_\alpha^s}{dt} + \sum \beta_\alpha^s \frac{d\beta_\alpha^k}{dt} = 0, \quad p_{kk} = 0.$$

On a donc

$$\sum_k \beta_r^k p_{ks} = \sum_\alpha \left(\sum_k \beta_r^k \beta_\alpha^k\right) \frac{d\beta_\alpha^s}{dt} = \sum_\alpha \delta_{r\alpha} \frac{d\beta_\alpha^s}{dt} = \frac{d\beta_r^s}{dt},$$

et finalement

$$\frac{d\beta_r^s}{dt} = \sum \beta_r^k p_{ks}.$$

On peut considérer ces relations comme les équations de liaison

$$\frac{d\beta_r^1}{dt} = r\beta_r^2 - q\beta_r^3, \quad \frac{d\beta_r^2}{dt} = p\beta_r^3 - r\beta_r^1, \quad \frac{d\beta_r^3}{dt} = q\beta_r^1 - p\beta_r^2.$$

Ce sont les équations de Poisson et on peut les écrire directement en s'appuyant sur ce que les points P_1, P_2, P_3, situés sur les axes fixes, sont fixes :

$$P_1(\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{z} = 0), \quad P_2(\bar{x} = 0, \bar{y} = 1, \bar{z} = 0),$$
$$P_3(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = 1).$$

Les équations de Poisson impliquent que la vitesse absolue du point $P_r(\beta_r^1, \beta_r^2, \beta_r^3)$ est égale à zéro ; la vitesse absolue du point P_r se compose de la vitesse relative

$$\frac{d\beta_r^1}{dt}, \quad \frac{d\beta_r^2}{dt}, \quad \frac{d\beta_r^3}{dt}$$

et de la vitesse d'entraînement

$$\left\| \begin{matrix} p & q & r \\ \beta_r^1 & \beta_r^2 & \beta_r^3 \end{matrix} \right\|.$$

Selon le théorème d'Euler

$$p = -p_{23} = p_{32}, \quad q = -p_{31} = p_{13}, \quad r = -p_{12} = p_{21}.$$

Considérons la fonction de la position du solide $f(t, \beta_r^s)$. Pour cette fonction on doit avoir

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{\partial f}{\partial \beta_r^s} \frac{d\beta_r^s}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum \frac{\partial f}{\partial \beta_r^s} \beta_r^k p_{ks} + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$p\sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2}\beta_\alpha^3 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^3}\beta_\alpha^2\right) + q\sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^3}\beta_\alpha^1 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1}\beta_\alpha^3\right) +$$

$$r\sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1}\beta_\alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2}\beta_\alpha^1\right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Par conséquent

$$X_0 = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad X = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2}\beta_\alpha^3 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^3}\beta_\alpha^2\right),$$

$$Y = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^3}\beta_\alpha^1 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1}\beta_\alpha^3\right), \quad Z = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1}\beta_\alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2}\beta_\alpha^1\right),$$

$$\eta_1 = p, \quad \eta_2 = q, \quad \eta_3 = r.$$

D'où

$$(X, Y)f = X(Yf) - Y(Xf) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1}\beta_\alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2}\beta_\alpha^1\right) = Zf,$$

et de même

$$(Y, Z)f = Xf, \quad (Z, X)f = Yf.$$

Ainsi les opérateurs infinitésimaux X, Y, Z forment un groupe de Lie des déplacements virtuels. Les constantes structurelles de ce groupe de Lie, qui

sont différentes de zéro, sont les suivantes :

$$c_{123} = 1,\ c_{231} = 1,\quad c_{312} = 1,\quad c_{213} = -1,\quad c_{321} = -1,\quad c_{132} = -1.$$

Dans le cas considéré l'opérateur $X_0 f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ sera commutatif avec le groupe de Lie X, Y, Z des déplacements virtuels, ce qui implique que $c_{0\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$.

Avec les notations $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$ les équations de Poincaré s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\beta} + X_i(T + U) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Choisissons pour axes mobiles x, y, z les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps solide construit par rapport à un point fixe. Avec ces axes

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

où A, B, C sont les moments d'inertie constants du corps solide par rapport aux axes x, y, z. On en tire $(i = 1)$

$$\frac{d}{dt}Ap = c_{213}qCr + c_{312}rBq + XU,$$

$$\frac{d}{dt}Ap = (B - C)qr + XU,$$

etc. Ce sont les équations connues d'Euler.

9. Exemple. *Transformation de similitude d'un corps* (D. Seiliger) (fig. 164). Soient β_i^k le cosinus de l'angle entre l'axe fixe $\bar{x}_i$ et l'axe mobile x_k ; a_1, a_2, a_3 les coordonnées de l'origine O du système de coordonnées mobiles ; O le centre de gravité du corps ; les coordonnées des différents points m du

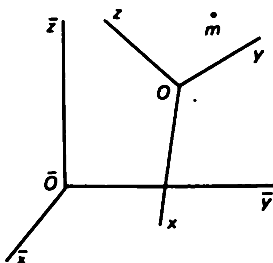


Fig. 164

corps sont

$$\bar{x}_i = a_i + \sum_{k=1}^{3} \beta_i^k x_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Adoptons en qualité de coordonnées déterminantes a_i, β_i^k, x_k. On a les relations suivantes :

$$\frac{da_i}{dt} = u_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d\beta_r^1}{dt} = r\beta_r^2 - q\beta_r^3, \quad \frac{d\beta_r^2}{dt} = p\beta_r^3 - r\beta_r^1,$$

$$\frac{d\beta_r^3}{dt} = q\beta_r^1 - p\beta_r^2 \quad (r = 1, 2, 3).$$

Dilatation suivant les rayons. En notant η le taux de dilatation suivant les rayons, on aura

$$\frac{dx_k}{dt} = \eta x_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Soit la fonction $f(t, a_i, \beta_i^k, x_k)$. On aura alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha u_\alpha \frac{\partial f}{\partial a_\alpha} + p \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2} \beta_\alpha^3 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^3} \beta_\alpha^2 \right) +$$

$$q \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^3} \beta_\alpha^1 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1} \beta_\alpha^3 \right) + r \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^1} \beta_\alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial \beta_\alpha^2} \beta_\alpha^1 \right) +$$

$$\eta \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z \right).$$

On voit que le groupe infinitésimal de Lie des déplacements réels d'un corps se transformant suivant les lois de similitude est constitué d'opérateurs

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad A_1 = \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad A_2 = \frac{\partial}{\partial a_2}, \quad A_3 = \frac{\partial}{\partial a_3},$$

$$X = \sum_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \beta_\alpha^2} \beta_\alpha^3 - \frac{\partial}{\partial \beta_\alpha^3} \beta_\alpha^2 \right), \quad Y = \sum_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \beta_\alpha^3} \beta_\alpha^1 - \frac{\partial}{\partial \beta_\alpha^1} \beta_\alpha^3 \right),$$

$$Z = \sum_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \beta_\alpha^1} \beta_\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial \beta_\alpha^2} \beta_\alpha^1 \right), \quad \Phi = \sum \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Le sous-groupe des déplacements virtuels

$$A_1, A_2, A_3, X, Y, Z, \Phi$$

se compose de trois sous-groupes : le sous-groupe des déplacements de translation

$$A_1, A_2, A_3,$$

jouissant de la propriété

$$(A_\alpha, A_\beta) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) ;$$

le sous-groupe des rotations X, Y, Z jouissant de la propriété (que nous avons établie dans l'exemple précédent)

$$(X, Y) = Z, \quad (Y, Z) = X, \quad (Z, X) = Y ;$$

le sous-groupe de dilatation suivant les rayons ne contenant qu'une seule transformation Φ.

Ces sous-groupes commutent en ce sens que

$$(A_\alpha, X_\beta) = 0, \quad (A_\alpha, \Phi) = 0, \quad (X_\alpha, \Phi) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Calculons la force vive

$$T = \sum \frac{m}{2}(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2) ;$$

nous avons

$$\bar{x}_i' = a_i' + \sum x_k \frac{d\beta_i^k}{dt} + \sum \beta_i^k \frac{dx^k}{dt} =$$
$$a_i' + x_1(r\beta_i^2 - q\beta_i^3) + x_2(p\beta_i^3 - r\beta_i^1) + x_3(q\beta_i^1 - p\beta_i^2) + \eta \sum \beta_i^k x_k =$$
$$a_i' + p(x_2\beta_i^3 - x_3\beta_i^2) + q(x_3\beta_i^1 - x_1\beta_i^3) + r(x_1\beta_i^2 - x_2\beta_i^1) + \eta \sum \beta_i^k x_k.$$

D'où

$$T = \sum \sum \frac{m}{2} \bar{x}_i'^2 = \sum \frac{m}{2} \sum (a_i' + p(x_2\beta_i^3 - x_3\beta_i^2) +$$
$$q(x_3\beta_i^1 - x_1\beta_i^3) + r(x_1\beta_i^2 - x_2\beta_i^1) + \eta \sum \beta_i^k x_k)^2.$$

Mais comme le point O est le centre de masse du système

$$\sum m x_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$
$$\sum m \sum_i (\sum \beta_i^k x_k)^2 = \sum m(x^2 + y^2 + z^2) = \Pi ;$$

Π est le moment d'inertie polaire du corps par rapport au centre de masse O. D'autre part

$$\sum m \sum [p(x_2\beta_i^3 - x_3\beta_i^2) + q(x_3\beta_i^1 - x_1\beta_i^3) + r(x_1\beta_i^2 - x_2\beta_i^1)]^2 =$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq,$$

avec

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \quad B = \sum m(z^2 + x^2), \quad C = \sum m(x^2 + y^2),$$
$$D = \sum myz, \quad E = \sum mzx, \quad F = \sum mxy.$$

On a encore

$$\sum m \sum_i [p(x_2\beta_i^3 - x_3\beta_i^2) + \ldots] \sum \beta_i^k x_k =$$
$$\sum m \Big(p \sum_k x_2 x_k \underbrace{\sum_i \beta_i^3 \beta_i^k}_{\delta_{3k}} - p \sum_k x_3 x_k \underbrace{\sum_i \beta_i^2 \beta_i^k}_{\delta_{2k}} + \ldots \Big) =$$
$$\sum m [p(x_2 x_3 - x_3 x_2) + \ldots] = 0.$$

On obtient finalement

$$T = \frac{M}{2}(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) +$$
$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) + \Pi \frac{\eta^2}{2}.$$

Si on adopte en qualité d'axes de coordonnées x, y, z les principaux axes de l'ellipsoïde d'inertie central, $D = E = F = 0$ et la force vive s'exprimera sous une forme plus simple

$$T = \frac{M}{2}(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \Pi \frac{\eta^2}{2}.$$

Les équations de mouvement de Poincaré s'écriront alors

$$M \frac{d^2 a_1}{dt^2} = A_1 U, \quad M \frac{d^2 a_2}{dt^2} = A_2 U, \quad M \frac{d^2 a_3}{dt^2} = A_3 U,$$
$$\frac{d}{dt} Ap = c_{213} qCr + c_{312} rBq + XU,$$

ou

$$\frac{d}{dt} Ap = (B - C)qr + XU,$$

.................................,

puis

$$\frac{d\Pi\eta}{dt} = \Phi(T + U),$$

mais

$$\Phi A = \sum\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\sum m(y^2 + z^2) = \sum m(2y^2 + 2z^2) = 2A,$$

$$\Phi B = 2B, \quad \Phi C = 2C, \quad \Phi\Pi = 2\Pi.$$

On obtient donc

$$\Phi(T) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Pi\eta^2, \quad \Phi U - \text{viriel}.$$

Le système des équations du mouvement d'un corps se transformant selon les lois de similitude est donc

$$\frac{d}{dt}\Pi\eta = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Pi\eta^2 + \Phi U, \quad \frac{d}{dt}Ap = (B - C)qr + XU,$$

$$\frac{d}{dt}Bq = (C - A)rp + YU, \quad \frac{d}{dt}Cr = (A - B)pq + ZU,$$

$$M\frac{d^2a_1}{dt^2} = A_1U, \quad M\frac{d^2a_2}{dt^2} = A_2U, \quad M\frac{d^2a_3}{dt^2} = A_3U.$$

Ces équations ont été établies par D. Seiliger. Chez ce dernier la première équation s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2\Pi}{dt^2} = 2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Pi\eta^2) + 2\Phi U,$$

puisque

$$\Pi\eta = \eta\sum m\varrho^2 = \sum m\varrho\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m\varrho^2 = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}.$$

10. Exemple. *Corps subissant une transformation affine.* L'espace x, y, z est fixe. La transformation, qui constitue une transformation identique pour les valeurs nulles des paramètres a_i, p, q, r, ε_1, ε_2, ε_3, σ_1, σ_2, σ_3, est décrite par les équations

$$\begin{aligned} x' &= x + a_1 + qz - ry + \varepsilon_1 x + \sigma_3 y + \sigma_2 z, \\ y' &= y + a_2 + rx - pz + \sigma_3 x + \varepsilon_2 y + \sigma_1 z, \\ z' &= z + a_3 + py - qx + \sigma_2 x + \sigma_1 y + \varepsilon_3 z. \end{aligned}$$

Le groupe des déplacements virtuels d'un corps subissant une transformation affine se compose des opérateurs suivants :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

pour les déplacements de translation ;

$$X_p = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_q = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_r = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

pour les rotations ;

$$X_{\varepsilon_1} = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{\varepsilon_2} = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_{\varepsilon_3} = z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_{\sigma_1} = y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_{\sigma_2} = z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_{\sigma_3} = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$$

pour les déformations.

Exemple. Corps plan subissant une transformation affine. Pour un plan le groupe affine général est de la forme

$$X_1 = \sum\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \sum\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \sum x\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_4 = \sum x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = \sum y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = \sum y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Exemple. Groupe unimodulaire affine dans un plan:

$$X_1 = \sum\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \sum\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \sum x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_4 = \sum y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = \sum\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

11. Si en l'absence d'une fonction de force un point matériel de masse m est soumis à l'action d'une force dont les projections sur les axes fixes sont U, V, W, le principe d'Euler-Lagrange se présente sous la forme

$$\sum m\left(\frac{d^2u}{dt^2}\delta u + \frac{d^2v}{dt^2}\delta v + \frac{d^2w}{dt^2}\delta w\right) = \sum(U\delta u + V\delta v + W\delta w).$$

En répétant les calculs que nous avons effectués pour établir les équations de Poincaré on obtient les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} - XT = \sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0i\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + Q_i,$$

où $Q_i = \sum(UX_iu + VX_iv + WX_iw)$ représente la force généralisée. La signification mécanique de la force généralisée découle de l'expression

$$A = \sum(U\delta u + V\delta v + W\delta w) = \sum \omega_i Q_i,$$

qui montre que Q_i représente le quotient du travail A_i produit par les forces appliquées lors d'un déplacement virtuel par l'un des paramètres ω_i du déplacement virtuel lorsque ce paramètre est différent de zéro, tandis que les autres ω_j $(j \neq i)$ sont égaux à zéro :

$$Q_i = \frac{A_i}{\omega_i}.$$

12. Déplacements cycliques. Ecrivons les équations de Poincaré

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\right) = \sum c_{\alpha i \beta}\eta_\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0i\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + X_i(T + U)$$
$$(i = 1, ..., k).$$

Supposons que pour $i = s + 1, ..., k$ on a les égalités

1° $c_{\alpha i \beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., k), \quad (X_\alpha, X_i) = 0$;

2° $c_{0i\beta} = 0 \; (X_0, \;\; X_i) = 0$;

3° $X_i(T + U) = 0 \quad (i = s + 1, ..., k)$.

Les déplacements X_i jouissant de ces propriétés sont dits cycliques.

Les déplacements cycliques forment le sous-groupe abélien des déplacements virtuels qui est commutatif avec tous les X_α $(\alpha = 1, ..., k)$. Appliquons les équations de Poincaré aux déplacements cycliques

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} = 0 \quad (\alpha = s + 1, ..., k),$$

ce qui signifie qu'à ces déplacements correspondent les intégrales

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} = \beta_\alpha \quad (\alpha = s + 1, ..., k),$$

où β_α sont les constantes d'intégration.

Les paramètres $\eta_{s+1}, ..., \eta_k$ figurant dans le système ci-dessus peuvent être exprimés en termes de β_α et des variables déterminantes $t, x_1, ..., x_n$ et $\eta_1, ..., \eta_s$. Supposons que cette substitution est effectuée et considérons la fonction

$$R(t, x_1, ..., x_n, \eta_1, ..., \eta_s, \beta_{s+1}, ..., \beta_k) = T + U - \sum_{\alpha = s+1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\eta_\alpha.$$

D'où on tire

$$\delta R = \sum_{j=1}^{k} \omega_j X_j R + \sum_{1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \eta_r} \delta\eta_r + \sum_{s+1}^{k} \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} \delta\beta_\alpha =$$

$$\sum_{1}^{k} \omega_j X_j (T + U) + \sum_{1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \eta_j} \delta\eta_j - \sum_{s+1}^{k} \eta_\alpha \delta\beta_\alpha - \sum_{s+1}^{k} \beta_\alpha \delta\eta_\alpha =$$

$$\sum_{1}^{k} \omega_j X_j (T + U) + \sum_{1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \eta_r} \delta\eta_r - \sum_{s+1}^{k} \eta_\alpha \delta\beta_\alpha .$$

En identifiant les coefficients auprès des mêmes variations et en remarquant que $X_\alpha(T + U) = 0$ $(\alpha = s + 1, \ldots, k)$ on a

$$X_r R = X_r (T + U), \quad X_\alpha R = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \eta_r} = \frac{\partial T}{\partial \eta_r}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} = -\eta_\alpha \quad (r = 1, \ldots, s; \quad \alpha = s + 1, \ldots, k).$$

Avec ces relations les équations de Poincaré relatives aux déplacements non cycliques s'écrivent sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \eta_r} = \sum c_{\alpha r \beta} \eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{\alpha r \gamma} \eta_\alpha \beta_\gamma + \sum c_{0 r \beta} \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0 r \gamma} \beta_\gamma + X_r R$$

$$(r, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, s; \quad \gamma = s + 1, \ldots, k);$$

après que ces équations auront été intégrées, les valeurs des paramètres de Poincaré η_α $(\alpha = s + 1, \ldots, k)$ seront données par

$$\eta_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha} .$$

Exemple. Les intégrales premières élémentaires de ce type ont été indiquées dans l'ouvrage de S. Tchaplyguine « Sur une généralisation possible du théorème des aires et application au problème du roulement des billes », publié en 1897.

Remarque. Les intégrales associées aux coordonnées ou aux déplacements cycliques sont linéaires par rapport aux vitesses ou linéaires par rapport aux paramètres de Poincaré η_α des déplacements réels.

13. Equations canoniques. Introduisons les nouvelles variables

$$y_i = \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \quad (i = 1, \ldots, k).$$

On peut résoudre ce système par rapport à η_i ; on obtient des solutions univoques $\eta_i = \eta_i\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ puisque $\left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta} \right\| > 0$ car par définition T est une fonction positive de $\eta_1, \ldots, \eta_k$.

Considérons la fonction

$$H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \sum y_\alpha \eta_\alpha - T - U.$$

On en tire

$$\delta H = \sum \omega_j X_j H + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha =$$

$$\sum y_\alpha \delta\eta_\alpha + \sum \eta_\alpha \delta y_\alpha - \sum \omega_j X_j (T + U) - \sum \frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \delta\eta_\alpha$$

(la somme du premier et du dernier terme du second membre est égale à zéro). En identifiant les coefficients auprès des mêmes variations on obtient

$$X_j H = -X_j(T + U), \quad \eta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}.$$

En conséquence les équations canoniques seront de la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum c_{\alpha i \beta} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} y_\beta + \sum c_{0 i \beta} y_\beta - X_i H, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}.$$

On peut mettre ces équations sous une forme différente :

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \sum c_{\alpha i \beta} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} y_\beta + \sum c_{0 i \beta} y_\beta - X_i H, \\ \frac{dx_j}{dt} &= X_0 x_j + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha x_j \quad (i, \alpha, \beta = 1, \ldots, k\,;\ j = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{14}$$

14. Equation aux dérivées partielles. Considérons le théorème suivant. *Supposons connue l'intégrale complète*

$$V(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) + a_{n+1}$$

d'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre

$$X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V) = 0.$$

La solution des équations canoniques (14) *est alors déterminée par le système*

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = b_j, \quad y_\alpha = X_\alpha V \quad (j = 1, \ldots, n\,;\ \alpha = 1, \ldots, k). \tag{15}$$

En effet, pour une intégrale complète le déterminant fonctionnel

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial a_r} \right\|$$

est différent de zéro, car autrement la fonction V serait l'intégrale d'une autre équation ne contenant pas $\partial V/\partial t$, ce qui est en contradiction avec la définition de l'intégrale complète.

Dérivons (15)

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial a_j} + \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_r\, \partial a_j} \frac{dx_r}{dt}.$$

Substituons l'intégrale complète dans l'équation et prenons la dérivée par rapport à a_j. On a

$$0 = X_0 \frac{\partial V}{\partial a_j} + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha \frac{\partial V}{\partial a_j} =$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\, \partial t} + \sum \frac{\partial^2 V}{\partial a_j\, \partial x_r} X_0 x_r + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \frac{\partial^2 V}{\partial a_j\, \partial x_r} X_\alpha x_r =$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\, \partial t} + \sum \frac{\partial^2 V}{\partial a_j\, \partial x_r} \left\{ X_0 x_r + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha x_r \right\}.$$

Puisque

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial a_j\, \partial x_r} \right\| \neq 0,$$

les deux derniers systèmes possèdent une solution unique. Par conséquent

$$\frac{dx_r}{dt} = X_0 x_r + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha x_r.$$

Ainsi les x_r déterminés à l'aide de (15) vérifient le deuxième système d'équations canoniques. D'autre part,

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{d}{dt} X_i V = X_0(X_i V) + \sum \eta_\alpha X_\alpha (X_i V) = X_0(X_i V) +$$
$$\sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha (X_i V) = \sum c_{0i\beta} X_\beta V + X_i(X_0 V) + \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} c_{\alpha i\beta} X_\beta V +$$
$$\sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_i(X_\alpha V) + X_i H - X_i H = \sum c_{\alpha i\beta} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} y_\beta + \sum c_{0i\beta} y_\beta -$$
$$X_i H + X_i(X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V)),$$

ce qu'il fallait démontrer.

15. Intégrale des forces vives. Multiplions les équations de Poincaré $\left(\text{cas } c_{0i\beta} = 0,\ X_0 = \frac{\partial}{\partial t}\right)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + X_i(T + U)$$

par η_i et sommons :

$$\sum \eta_i \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta}\sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha \eta_i + \sum \eta_i X_i(T + U)$$

(la première somme dans le second membre est égale à zéro car $c_{\alpha i\beta} = -c_{i\alpha\beta}$) ;

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial \eta_i}\eta_i\right) = \sum \frac{\partial T}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt} + \sum \eta_i X_i(T + U).$$

Dans le cas où $\frac{\partial}{\partial t}(T + U) = 0$ on aura

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial \eta_i}\eta_i\right) = \frac{d}{dt}(T + U),$$

et par suite

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \eta_i}\eta_i = T + U + h.$$

Si $T = T_2 + T_1 + T_0$, on aura

$$2T_2 + T_1 = T_2 + T_1 + T_0 + U + h, \qquad T_2 = T_0 + U + h.$$

C'est la généralisation de l'intégrale des forces vives. Les cas particuliers sont bien connus : 1) intégrale de Jacobi ; 2) intégrale ordinaire des forces vives.

16. Cas de l'intégrabilité. Généralisation des déplacements cycliques. Posons $c_{0\alpha\beta} = 0$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + X_i(T + U),$$

i a une valeur donnée. Soit

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta \qquad (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}).$$

On en tire

$$\sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha a_{\gamma\beta}\eta_\beta = \sum \eta_\alpha\eta_\gamma \sum_{\gamma=1}^{k} c_{\alpha i\beta}a_{\gamma\beta}.$$

Il peut arriver que

1° $\sum_{\beta=1}^{k} c_{\alpha i \beta} a_{\gamma\beta} = 0$

pour α, $\beta = 1, \ldots, k$ et un certain i. Si l'on a encore

2° $X_i(T + U) = 0$,

les équations de Poincaré se réduisent alors à la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = 0,$$

et l'intégrale est alors égale à

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \beta_i.$$

Exemple. Le cas considéré se rapporte au mouvement d'un solide pesant à point fixe ; c'est donc le cas envisagé par Lagrange. Si on choisit en qualité de variables déterminantes les angles d'Euler qui déterminent les positions des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps, construit pour le point fixé, par rapport aux axes fixes $Ox_1y_1z_1$, où z_1 est la verticale ascendante, on aura

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$

$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \quad r = \psi' \cos\theta + \varphi',$$

d'où

$$\theta' = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \psi' = \frac{1}{\sin\theta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi),$$

$$\varphi' = r - \operatorname{cotg}\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi).$$

Dans ces conditions

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + pXf + qYf + rZf,$$

$$X = -\operatorname{cotg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$Y = -\operatorname{cotg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

constitue un groupe transitif. Il en résulte

$$(X, Y) = Z, \quad (Y, Z) = X, \quad (Z, X) = Y.$$

La force vive

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Posons $i = 3$. Les conditions d'intégrabilité sont

1° $X_3 U = 0, \quad X_3 = Z = \frac{\partial}{\partial \varphi}$;

2° $\sum c_{\alpha i \beta} a_{\gamma \beta} = 0$;

dans notre cas

$$c_{132} a_{22} + c_{231} a_{11} = -1 \cdot B + 1 \cdot A = A - B = 0.$$

Dans ce cas d'intégrabilité on doit avoir $A = B$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ et c'est ce qui est vérifié dans le cas de Lagrange $U = -mgz_0 \cos\theta$. L'intégrale est connue : $r = r_0$.

Généralisation :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum c_{\alpha i \beta} \eta_\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0 i \beta} \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + X_i(T + U),$$

i a une valeur fixe. Soit

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta + \sum b_\beta \eta_\beta + T_0.$$

On aura alors

$$\sum c_{\alpha i \beta}\eta_\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{0 i \beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} =$$
$$\sum c_{\alpha i \beta}\eta_\alpha a_{\gamma\beta}\eta_\gamma + \sum c_{\alpha i \beta}\eta_\alpha b_\beta + \sum c_{0 i \beta} a_{\gamma\beta}\eta_\gamma + \sum c_{0 i \beta} b_\beta.$$

Conditions des déplacements cycliques généralisés :

1° $\sum_{\beta=1}^{k} c_{\alpha i \beta} a_{\gamma\beta} = 0 \quad (\alpha, \gamma = 1, \ldots, k)$;

2° $\sum_{\beta=1}^{k} c_{\alpha i \beta} b_\beta + \sum_{\beta=1}^{k} c_{0 i \beta} a_{\alpha\beta} = 0$;

3° $\sum_{\beta=1}^{k} c_{0 i \beta} b_\beta = 0$;

4° $X_i(T + U) = 0$.

L'intégrale est

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \text{const.}$$

Pour ces déplacements cycliques on peut utiliser la méthode d'intégration exposée dans le point 12.

17. Sur l'intégrale complète. Il importe de revenir sur le groupe des déplacements réels. Les liaisons imposées au système mécanique s'expriment par des équations intégrables

$$\pi_j \equiv \sum_{s=1}^{n} a_{js} dx_s + a_j\, dt = 0 \quad (j = k + 1, \ldots, n).$$

Comme ce système est intégrable, on peut le réduire à la forme

$$d\Phi_j = 0 \quad (j = k + 1, \ldots, n).$$

Pour construire le groupe infinitésimal des déplacements réels nous compléterons les équations de liaison par des formes indépendantes

$$\pi_\alpha \equiv \sum_{s=1}^{n} a_{\alpha s} dx_s \quad (\alpha = 1, \ldots, k), \quad \pi_0 \equiv dt$$

avec la condition que toutes les formes $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ soient indépendantes :

$$\| a_{rs} \| \neq 0 \quad (r, s = 1, \ldots, n).$$

La différentielle de la fonction $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ s'exprimera maintenant en termes des opérateurs

$$df = \pi_0 X_0 f + \sum_{\alpha=1}^{n} \pi_\alpha X_\alpha f;$$

pour les déplacements réels $\pi_{k+1} = 0, \ldots, \pi_n = 0$, et de ce fait

$$df = \pi_0 X_0 f + \sum_{r=1}^{k} \pi_r X_r f.$$

De la condition $d\Phi_j = 0$ on trouve pour les fonctions Φ_j $(j = k + 1, \ldots, n)$

$$X_0 \Phi_j = 0, \quad X_r \Phi_j = 0 \quad (r = 1, \ldots, k; \quad j = k + 1, \ldots, n).$$

On peut donc ajouter à l'intégrale complète V de l'équation

$$X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V) = 0 \tag{16}$$

des termes qui sont linéaires en Φ_j affectés de coefficients constants arbitraires

$$V + \sum_{j=k+1}^{n} c_j \Phi_j.$$

Par conséquent, des n constantes essentielles $a_1, \ldots, a_n$, dont aucune n'est additive, $n - k$ constantes sont $c_{k+1}, \ldots, c_n$ et ces constantes arbitraires figureront dans la dernière formule sous cette forme. Il ne peut y avoir plus de n constantes. L'intégrale complète est donc de la forme

$$W = V(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k) + \sum_{j=k+1}^{n} a_j \Phi_j + a_{n+1}.$$

Ainsi, dans le théorème sur l'intégrale complète (pt. 14), $n - k$ relations servent à déterminer les liaisons holonomes constantes

$$\frac{\partial W}{\partial a} = b_j = \Phi_j \quad (j = k + 1, \ldots, n).$$

Voyons comment on détermine la partie principale de l'intégrale complète lorsque le groupe de Lie des déplacements réels est intransitif.

Appelons la fonction V partie principale de l'intégrale complète

$$X_\alpha W = X_\alpha V \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, k).$$

Mais $X_\alpha W = X_\alpha V = \varphi_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k)$; en éliminant $a_1, \ldots, a_k$ entre ces $k + 1$ relations on doit obtenir l'équation (16). On doit donc avoir

$$\frac{\partial(X_1 V, \ldots, X_k V)}{\partial(a_1, \ldots, a_k)} \neq 0.$$

Ainsi en utilisant la partie principale $V(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k)$ on obtient la solution de (16) sous la forme

$$y_\alpha = X_\alpha V, \quad b_\alpha = \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, k) ; \tag{17}$$

lorsqu'on ajoute les liaisons $\Phi_j = b_j \quad (j = k + 1, \ldots, n)$, la solution sera complètement déterminée par la dernière relation $b_\alpha = \partial W/\partial a_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, k$) :

$$x_s = x_s(t, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n).$$

On détermine l'intégrale complète W par la méthode ordinaire. Comment fait-on pour trouver la partie principale de V ? Cette question se pose lorsque n est grand devant k.

18. Principe de Hamilton. Afin de mieux mettre en évidence les propriétés de l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi il convient de considérer la fonction d'action. Pour commencer nous allons déduire le principe connu de Hamilton du principe d'Euler-Lagrange (pt. 8). Nous avons

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum m\left(\frac{du'}{dt}\,\delta u + \frac{dv'}{dt}\,\delta v + \frac{dw'}{dt}\,\delta w\right) - \delta U\right)dt = 0.$$

Le mouvement sera réel si

$$\omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \quad \text{pour } t = t_0,\ t_1\ ;$$

les extrémités sont fixées. Considérons

$$\int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{du'}{dt}\,\delta u\, dt = [mu'\delta u]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} mu'\,\frac{d\delta u}{dt}\,dt,$$

or

$$[\delta u]_{t_0}^{t_1} = \left[\sum \omega_\alpha X_\alpha u\right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

et

$$\frac{d\delta u}{dt} = \delta\,\frac{du}{dt},\ \ldots$$

en vertu des relations de commutativité (pt. 7). D'autre part,

$$-\int_{t_0}^{t_1} mu'\,\frac{d\delta u}{dt}\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} mu'\delta u'\,dt = -\delta\int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{u'^2}{2}\,dt,$$

ce qui entraîne

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T + U)\,dt = 0$$

à condition que $\omega_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, k$) pour $t = t_0, t_1$. (Pour la pratique des calculs j'avais illustré ce résultat par le calcul de $\dfrac{d}{dt}\,\delta u = \dfrac{d}{dt}\sum \omega_\alpha X_\alpha$ et en utilisant les formules de commutativité.) C'est en partant du principe de Hamilton que Poincaré formula ses équations. J'ai également fondé mes propres recherches sur le principe de Hamilton.

19. La fonction d'action. Cette fonction est définie par la relation

$$V(t, x_1, \ldots, x_n\,;\, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = \int_{t_0}^{t} L\,dt = \int_{t_0}^{t}\left(\sum y_\alpha \eta_\alpha - H\right)dt,$$

où, conformément au point 13,

$$H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \sum y_\alpha \eta_\alpha - L,$$

l'intégration étant effectuée le long de la trajectoire réelle du système mécanique. On a

$$\delta V = \sum \omega_\alpha X_\alpha V + \sum \omega_\alpha^0 X_\alpha^0 V =$$

$$\int_{t_0}^{t} \left(\sum \eta_\alpha \delta y_\alpha + \sum y_\alpha \delta \eta_\alpha - \sum \omega_\alpha X_\alpha H - \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha \right) dt =$$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\sum \delta y_\alpha \left(\eta_\alpha - \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \right) + \sum y_i \left(\frac{d\omega_i}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i} \eta_\beta \omega_\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. \sum c_{0\alpha i} \omega_\alpha \right) - \sum \omega_\alpha X_\alpha H \right] dt = \left[\sum y_i \omega_i \right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum \delta y_\alpha \left(\eta_\alpha - \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. \sum \omega_\alpha \left(- \frac{dy_\alpha}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i} \eta_\beta y_i + \sum c_{0\alpha i} y_i - X_\alpha H \right) \right\} dt =$$

$$\sum y_i \omega_i - \sum y_i^0 \omega_i^0$$

en vertu des équations canoniques du mouvement. Dans ces expressions ω_α^0 sont les paramètres de la variation initiale de la trajectoire, X_α^0 sont les opérateurs infinitésimaux X_α après que l'on y aura substitué les variables t_0, x_s^0.

En identifiant les coefficients auprès des mêmes ω_α^0, ω_α choisis arbitrairement on obtient

$$y_\alpha = X_\alpha V, \quad -y_\alpha^0 = X_\alpha^0 V \quad (\alpha = 1, \ldots, k).$$

Le deuxième groupe d'équations détermine la loi du mouvement dès que l'on connaît la fonction d'action.

D'autre part,

$$\frac{dV}{dt} = X_0 V + \sum \eta_\alpha X_\alpha V = L,$$

soit

$$X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0$$

avec

$$H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \sum y_\alpha \eta_\alpha - L.$$

Par conséquent V est l'intégrale complète de l'équation

$$X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V) = 0.$$

Ce résultat montre que parmi les constantes b_α (pt. 17) de l'intégrale complète, lorsque V est l'action, ne sont essentielles que les suivantes :

$$-y_\alpha^0 = X_\alpha^0 V;$$

ces dernières sont déterminées par certains opérateurs X_α^0 de l'intégrale complète.

20. Différentes formes du principe de la moindre action. Il convient d'examiner cette question de plus près. Le principe de Hamilton s'exprime sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)dt = 0$$

avec les conditions aux extrémités : $\omega_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, k$) pour $t = t_0, t_1$; à l'intérieur de l'intervalle t_0, t_1, les paramètres ω_α sont parfaitement arbitraires.

Nous allons démontrer que l'on obtient les équations du mouvement sous leur forme canonique en partant de la condition

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\sum y_\alpha \eta_\alpha - H)dt = 0, \tag{18}$$

où H désigne la fonction de Hamilton

$$H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$$

avec les conditions aux extrémités : $\omega_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, k$) pour $t = t_0, t_1$ et en entendant par y_α dans (18) des variables indépendantes, ce qui revient à considérer ω_α et δy_α comme des quantités arbitraires et indépendantes dans l'intervalle t_0, t_1.

Nous avons en effet

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum y_\alpha \eta_\alpha - H\right)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum y_\alpha \delta\eta_\alpha + \sum \eta_\alpha \delta y_\alpha - \right.$$

$$\left. \sum \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha - \sum \omega_\alpha X_\alpha H\right)dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{\sum \delta y_\alpha \left(\eta_\alpha - \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\right) + \sum y_i \left(\frac{d\omega_i}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i} \eta_\beta \omega_\alpha + \sum c_{0\alpha i} \omega_\alpha\right) - \right.$$

$$\left. \sum \omega_\alpha X_\alpha H\right\}dt = \left[\sum y_i \omega_i\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{\sum \delta y_\alpha \left(\eta_\alpha - \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. \sum \omega_\alpha \left(-\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i} \eta_\beta y_i + \sum c_{0\alpha i} y_i - X_\alpha H\right)\right\}dt = 0.$$

L'expression figurant hors du signe d'intégration est égale à zéro en raison des conditions aux extrémités. Compte tenu de ce que δy_α et ω_α sont indé-

pendants et arbitraires, on en déduit les équations

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \sum c_{\beta\alpha i}\eta_\beta y_i + \sum c_{0\alpha i} y_i - X_\alpha H, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}.$$

Ce sont les équations canoniques que nous avons démontrées dans le point 13.

Le principe (18) possède une importance propre du fait de l'hypothèse sur l'indépendance des valeurs des fonctions y_α ou plus exactement sur le caractère arbitraire indépendant des variations δy_α vis-à-vis les paramètres variationnels ω_α à l'intérieur de l'intervalle t_0, t_1.

Le principe d'action sous la forme (18) peut aussi s'énoncer comme suit : pour les mouvements réels on a

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum y_\alpha \eta_\alpha - H\right) dt = 0 \tag{19}$$

avec les conditions aux extrémités $\omega_\alpha = 0$, $\delta y_\alpha = 0$ pour $t = t_0$, t_1, δy_α et ω_α étant arbitraires à l'intérieur de l'intervalle t_0, t_1.

Cette hypothèse peut être prouvée aussitôt en remarquant qu'en intégrant par parties hors de l'intervalle l'expression ci-dessus dépend linéairement de ω_α pour $t = t_0$, t_1 et ne dépend pas de δy_α.

Remarque. On démontre les principes (18) et (19) en s'appuyant sur les équations différentielles canoniques du mouvement du système mécanique que nous avons déjà démontrées.

On peut déduire les équations canoniques (14) du principe de Hamilton. C'est ce que nous allons faire.

Le principe de la moindre action de Hamilton se traduit par

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0$$

avec les conditions aux extrémités $\omega_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ pour $t = t_0$, t_1. A l'intérieur de cet intervalle ω_α sont arbitraires et indépendants. Les variations des paramètres $\delta\eta_\alpha$ des déplacements réels sont liées à ω_α par les relations

$$\delta\eta_i = \frac{d\omega_i}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i}\eta_\beta \omega_\alpha + \sum c_{0\alpha i}\omega_\alpha,$$

ce qui entraîne que les variables canoniques (pt. 13)

$$y_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \tag{20}$$

étant dépendantes de $t, x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_k$ présenteront des variations δy_α dépendant de $\omega_1, \ldots, \omega_k$. On doit en tenir compte lorsqu'on utilise le principe de Hamilton. On peut exprimer le principe de Hamilton sous une forme différente

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum y_\alpha \eta_\alpha - H\right) dt = 0$$

avec $\omega_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, k$) pour $t = t_0, t_1$, où

$$H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \sum y_\alpha \eta_\alpha - T - U; \tag{21}$$

y_α figurant dans le principe de Hamilton doit être considéré comme dépendant de η_α selon les formules (20). On aura aussi

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum y_\alpha \eta_\alpha - H\right) dt = \left[\sum y_i \omega_i\right]_{t_0}^{t_1} +$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{\sum \omega_\alpha \left(-\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i} \eta_\beta y_i + \sum c_{0\alpha i} y_i - X_\alpha H\right) + \sum \delta y_\alpha \left(\eta_\alpha - \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\right)\right\} dt = 0.$$

L'expression $\left[\sum y_i \omega_i\right]_{t_0}^{t_1}$ est égale à zéro en raison des conditions aux extrémités. De la relation (21), établie à l'aide des formules de transformation (20), on obtient

$$\delta H = \sum \omega_\alpha X_\alpha H + \sum \delta y_\alpha \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} =$$
$$\sum \delta y_\alpha \eta_\alpha + \sum y_\alpha \delta \eta_\alpha - \sum \frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \delta \eta_\alpha - \sum \omega_\alpha X_\alpha (T + U);$$

dans le second membre, la somme du deuxième et du dernier terme est égale à zéro. En raison de l'indépendance des valeurs initiales des coordonnées et des vitesses indépendantes à un instant initial que nous pouvons choisir arbitrairement, y compris l'instant considéré, les coefficients auprès des mêmes ω_α et δy_α doivent être égaux :

$$\eta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}.$$

L'expression suivante subsiste du principe de Hamilton

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \omega_\alpha\left(-\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i}\eta_\beta y_i + \sum c_{0\alpha i} y_i - X_\alpha H\right)dt = 0,$$

et comme ω_α peut être fixé arbitrairement entre t_0 et t_1, il vient

$$-\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum c_{\beta\alpha i}\eta_\beta y_i + \sum c_{0\alpha i} y_i - X_\alpha H = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k).$$

21. Transformations de contact. Considérons les nouvelles variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ déterminant les positions du système considéré et un groupe de Lie des déplacements réels A_α ($\alpha = 0, 1, \ldots, k$) dépendant de t et de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et comportant un sous-groupe de déplacements virtuels $A_1, \ldots, A_k$.

Soient $\gamma_{\alpha\beta i}$ les constantes structurelles du groupe

$$(A_\alpha, A_\beta) = \sum \gamma_{\alpha\beta i} A_i$$

et soit $\gamma_{0\beta i} = 0$, ce qui implique que $A_0 = \partial/\partial t$. Notons π_α les paramètres d'un déplacement virtuel et θ_α les paramètres d'un déplacement réel,

$$\delta f(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum \pi_\alpha A_\alpha f, \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \theta_\alpha A_\alpha f.$$

Exprimons la transformation des variables à l'aide de la fonction caractéristique

$$V(t, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \neq 0$$

par les formules suivantes :

$$y_s = X_s V, \quad -\beta_s = A_s V \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{22}$$

Les formules (22) suffisent pour déterminer complètement les transformations. On doit leur adjoindre les équations des liaisons (pt. 17) :

$$\Phi_j = b_j \quad (j = n - k, \ldots, n) \tag{23}$$

données en termes des variables $x_1, \ldots, x_n$ ainsi que les équations des liaisons écrites en termes des variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Conformément à ce qui a été dit au point 17, ces dernières sont déterminées par les solutions du système d'équations

$$A_\alpha Z = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, k).$$

Désignons le système des solutions indépendantes par

$$Z = Z_j \quad (j = n - k, \ldots, k),$$

ce qui entraîne que les équations des liaisons s'écriront

$$Z_j = Z_j^0 (t_0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0). \tag{24}$$

Les systèmes (23) et (24) permettent d'isoler les variables indépendantes dans le système $x_1, \ldots, x_n$ ainsi que dans le système $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Les $2k$ équations (22) suffiront amplement pour déterminer la transformation de contact.

Multiplions maintenant les relations ci-dessus respectivement par η_s et θ_s et sommons :

$$\sum y_s \eta_s - \sum \beta_s \theta_s = \sum \eta_s X_s V + \sum \theta_s A_s V + X_0 V - X_0 V = \frac{dV}{dt} - X_0 V.$$

Remarque. Nous avons été obligés d'imposer la condition $\gamma_{0\beta i} = 0$ pour effectuer cette dernière transformation, car autrement l'égalité suivante

$$\frac{dV}{dt} = X_0 V + \sum \eta_\alpha X_\alpha V + \sum \theta_\alpha A_\alpha V$$

ne pourrait avoir lieu. Dans ces conditions le principe de la moindre action

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \eta_s y_s - H\right) dt = 0$$

avec les conditions de Poincaré

$$\omega_\alpha = 0, \quad \delta y_\alpha = 0 \quad \text{pour } t = t_0, t_1$$

et ω_α, δy_α arbitraires à l'intérieur de l'intervalle d'intégration se réduit à la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \theta_s \beta_s - H^*\right) dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV}{dt}\, dt = 0. \tag{25}$$

De toute évidence, la variation de la dernière intégrale est nulle. Avec les nouvelles variables les conditions de variation deviennent

$$\pi_\alpha = 0, \quad \delta\beta_\alpha = 0 \quad \text{pour } t = t_0, t_1,$$

π_α et $\delta\beta_\alpha$ étant indépendants et arbitraires à l'intérieur de l'intervalle d'intégration (t_0, t_1),

$$H^*(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_k) = X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V).$$

Conformément au principe de la moindre action (25), avec les nouvelles variables les équations canoniques du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \sum \gamma_{\alpha i\beta}\theta_\alpha\beta_\beta - A_i H^*, \quad \theta_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial \beta_\alpha}.$$

Si la fonction caractéristique de transformation

$$V(t, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

est l'intégrale complète de l'équation

$$H^* = 0,$$

les équations canoniques écrites avec les nouvelles variables seront

$$\frac{d\beta_i}{dt} = 0, \quad \theta_\alpha = 0$$

et par suite

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum \theta_\alpha A_\alpha \alpha_i = 0.$$

L'intégration des équations

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

fournit les résultats suivants :

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \beta_i = \text{const}.$$

C'est précisément la généralisation du théorème de Hamilton-Jacobi.

En résumé, si $V(t, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est l'intégrale complète de l'équation

$$X_0 V + H(t, x_1, \ldots, x_n, X_1 V, \ldots, X_k V) = 0,$$

la solution des équations canoniques du mouvement

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum c_{\alpha i\beta}\eta_\alpha y_\beta + \sum c_{0i\beta} y_\beta - X_i H, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}$$

est déterminée par les formules

$$y_\alpha = X_\alpha V, \quad -\beta_\alpha = A_\alpha V,$$

ou α_i, β_i sont des constantes.

III. PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

§ 1

1. En électrodynamique, on adopte, après Lorentz, la théorie de l'éther au repos.

En se fondant sur cette théorie on pensait pouvoir mesurer la vitesse de déplacement de la Terre par rapport à l'éther. Michelson effectua, en 1881, des expériences qui ont permis de conclure que lors du mouvement de la Terre l'éther ne restait pas au repos. La précision de ces expériences était fort élevée et les physiciens se rappelèrent alors les expériences de Fiseau et le phénomène d'aberration dont l'interprétation paraissait douteuse.

Fitzgerald et Lorentz avancèrent l'hypothèse selon laquelle les dimensions des corps solides diminuaient dans le sens du mouvement (1895).

2. Dans un article publié en 1904 et intitulé « Phénomènes électromagnétiques se manifestant dans un système animé d'une vitesse inférieure à celle de la lumière », Lorentz posa la question de la transformation des équations de Maxwell n'altérant pas leur forme. C'est la question fondamentale du principe de la relativité.

En mécanique newtonienne les équations du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\,; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y\,; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

ne changent pas si on considère un second référentiel animé d'un mouvement de translation avec une vitesse uniforme par rapport au premier. Autrement dit, les équations du mouvement restent invariantes dans la transformation

$$x' = x + at, \quad y' = y + bt, \quad z' = z + ct, \quad t' = t.$$

C'est l'expression du principe de la relativité de la mécanique de Newton.

Les équations de l'électromagnétique jouent le rôle principal dans l'interprétation des phénomènes optiques. Lorentz posa la question de l'application du principe de la relativité aux équations du champ électromagnétique. Dans son article Lorentz ne réussit pas à trancher la question.

3. Le problème proposé par Lorentz a été brillamment résolu par Poincaré dans un article intitulé « Sur la dynamique de l'électron » (juillet 1905)*) en postulant qu'il était en principe impossible de déterminer le mouvement absolu de la Terre.

---

*) H. Poincaré. *Comptes-rendus*, Acad. Sci., 1905, v. 140, p. 1504-1508.

Dans un article intitulé « Contribution à l'électrodynamique du corps en mouvement » (1905), Einstein examina la signification cinématique des transformations de Lorentz et déblaya ainsi le terrain pour les recherches de Minkowski sur l'univers quadridimensionnel : espace + temps.

La conférence de Minkowski sur « L'espace et le temps » exerça une grande influence sur les savants de son temps. Les considérations d'Einstein, grâce à leur simplicité, connurent une large diffusion tandis que l'œuvre profonde de Poincaré resta peu connue. « Ou bien tout ce qui existe en ce monde est d'origine électromagnétique, ou bien cette propriété, qui est pour ainsi dire commune à tous les phénomènes physiques, est quelque chose d'apparent, quelque chose lié à nos méthodes de mesure » (Poincaré « Sur la dynamique de l'électron »).

4. Notons X, Y, Z les composantes du vecteur électrique et L, M, N les composantes du vecteur magnétique.

Pour le vide les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Considérons un nouveau référentiel animé d'un mouvement de translation avec une vitesse $v < c$ le long de l'axe x. Pour que les équations conservent leur forme dans le nouveau référentiel il faut modifier aussi le compte du temps :

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x' = \beta(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t'} = \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}\beta + \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial x}\beta v = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\beta + \beta\frac{v}{c}\left(-\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}\right) =$$

$$\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial y'} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right)}{\partial z'}.$$

On aura de même

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t'} = -\left(\frac{\partial\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial y'} - \frac{\partial\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)}{\partial z'}\right),$$

puis

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t'} = \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}\beta + \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial x}\beta v = \beta\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{v}{c}\beta\frac{\partial Y}{\partial x} =$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial z'} - \beta\frac{\partial N}{\partial x'}\beta - \beta\frac{\partial N}{\partial t'}\left(-\beta\frac{v}{c^2}\right) + \beta\frac{v}{c}\left[\frac{\partial Y}{\partial x'}\beta + \frac{\partial Y}{\partial t'}\left(-\beta\frac{v}{c^2}\right)\right]$$

et enfin

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{Y\left(1+\beta^2\frac{v^2}{c^2}\right) - \beta^2\frac{v}{c}N\right\} = \beta\frac{\partial L}{\partial z'} - \beta\frac{\partial\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial x'}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial x'}.$$

Il s'ensuit que les composantes des vecteurs électrique et magnétique dans un référentiel mobile doivent être proportionnelles aux expressions correspondantes dans les équations de Maxwell transformées.

Pour une raïson de symétrie et de transformation inverse, le facteur de transformation est égal à l'unité (en fait, ce facteur, qui est aussi présent dans les équations de Maxwell, dépend surtout du choix des unités de mesure des forces électromagnétiques). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &X' = X, \quad Y' = \beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right), \quad Z' = \beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right), \\ &L' = L, \quad M' = \beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right), \quad N' = \beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right). \end{aligned} \qquad (1)$$

Dans les deux référentiels les équations de Maxwell sont de la même forme.

A la suite de la transformation, c'est le temps qui change. Le principe de la relativité de l'électrodynamique introduit la notion du temps dépendant du référentiel utilisé. La notion du temps absolu disparaît ; les forces électriques et magnétiques ne sont pas indépendantes de l'état de mouvement du référentiel.

5. Cherchons l'invariant algébrique de la transformation de Lorentz (i.e. un intervalle) que nous aurons à utiliser plus tard. On a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 =$$

$$\beta^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 - c^2\beta^2\left(t^2 - 2\frac{v}{c^2}xt + \frac{v^2}{c^4}x^2\right) =$$

$$x^2\left(\beta^2 - \frac{v^2}{c^2}\beta^2\right) + y^2 + z^2 + \beta^2t^2[v^2 - c^2] = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

La transformation inverse (selon Poincaré) est

$$t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad x = \beta(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'.$$

Les transformations de Lorentz (Poincaré) forment un groupe.

Si on fonde nos conceptions physiques sur les équations de Maxwell, les transformations de Lorentz déterminent les notions de temps et de longueur. L'existence de ces transformations rend donc inutile la définition rigoureuse de ces notions.

Il suffit de postuler ce point de vue pour découvrir le monde passionnant que décrivirent Einstein et Minkowski.

§ 2

1. Si nous fondons l'interprétation des phénomènes sur les équations de Maxwell, qui sont invariantes par rapport à un mouvement de translation uniforme, l'espace et le temps qui existent indépendamment de nous apparaîtront sous un jour nouveau. C'est ce qu'expliqua Minkowski dans sa conférence sur « L'espace et le temps » (1908).

Nous allons faire connaissance avec « l'univers de Minkowski ».

2. L'espace et le temps. Minkowski (1908) développa les conceptions géométriques suivantes sur l'espace et le temps. Posons pour simplifier $c = 1$. Dans le système de coordonnées (t, x) de l'observateur immobile (supposons qu'il s'agit de coordonnées cartésiennes rectangulaires) à un certain événement correspond un point dans l'espace (t, x). L'évolution de cet événement dans l'espace (t, x) se traduit par le tracé d'une ligne. La coordonnée d'un observateur mobile se déplaçant à une vitesse v constante trace une droite t' bien déterminée telle que

$$\operatorname{tg} \alpha = v.$$

Considérons dans un univers plan l'hyperbole (fig. 165)

$$t^2 - x^2 = 1.$$

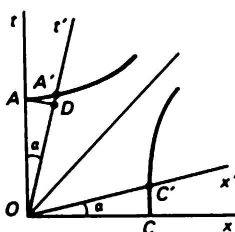


Fig. 165

Si on prend pour échelle les segments OA' et $OC' = OA'$ dans le référentiel (t', x') et les segments OA et $OC = OA$ dans le référentiel (t, x), dans le référentiel (t', x') l'équation de cette même hyperbole s'écrira

$$t'^2 - x'^2 = 1,$$

où x' est un rayon-vecteur conjugué de t'.

Si ce raisonnement est correct, en raison de l'invariance de l'intervalle $t^2 - x^2$ le passage aux nouveaux axes de coordonnées doit être effectué à l'aide des transformations de Lorentz.

En effet, d'après la figure 165, on a

$$t \cdot OA = t' \cdot OA' \cos\alpha + x' \cdot OC' \sin\alpha,$$
$$x \cdot OC = t' \cdot OA' \sin\alpha + x' \cdot OC' \cos\alpha.$$

Or

$$\frac{AD}{OA} = v = \operatorname{tg}\alpha.$$

D'après l'équation de l'hyperbole $OA'^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = OA^2$ on a

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

et par suite

$$t = \beta(t' + vx'), \quad x = \beta(x' + vt'), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Le vecteur temps t' caractérise pleinement le référentiel de l'observateur mobile.

Différents observateurs déterminent différemment les coordonnées géométriques et le temps d'un même point de l'univers.

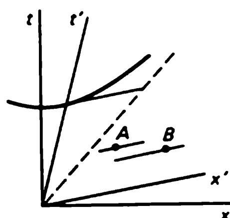


Fig. 166

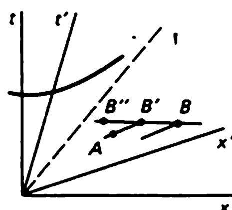


Fig. 167

3. Simultanéité des événements. Causalité. Deux événements A et B, déterminés par leurs points d'univers, seront simultanés dans le référentiel (t, x) si la ligne AB est parallèle à l'axe x (fig. 166).

Considérons un autre référentiel, caractérisé par le vecteur temps t' (fig. 167). Dans ce nouveau référentiel, les événements A et B ne seront plus simultanés. La figure 167 illustre le cas où dans le référentiel (t, x) l'événement A précède les événements B, B', B'', tandis que dans le référentiel (x', t'), l'événement B précède l'événement A, les événements A et B' sont simultanés et précèdent l'événement B''. Il s'ensuit que si ces différents événements sont corrélés par une dépendance fonctionnelle, les concepts « cause et effet » seront interprétés différemment par les observateurs dans les deux référentiels. La causalité ne disparaît pas mais prend une signification plus large d'une interdépendance plus rigoureuse des événements. L'événement A ne peut être la cause de l'événement B que s'il n'existe aucun référentiel mobile où ce dernier précéderait l'événement A. Cela ne peut avoir lieu que si le point B est contenu dans l'angle bAb' (fig. 168). Tous les événements qui seraient susceptibles d'être la cause de l'événement A sont contenus dans l'angle $a'Aa$. Par contre, les points contenus dans les angles $a'Ab'$ et bAa correspondent à des événements qui

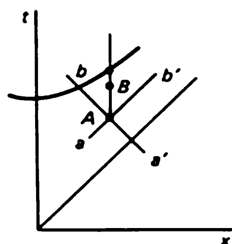


Fig. 168

se produisent, du point de vue de l'observateur mobile, plus tard ou plus tôt que l'événement A suivant la vitesse à laquelle se déplace cet observateur.

§ 3. Représentation de l'univers de Minkowski

1. Posons que la vitesse de la lumière $c = 1$. Considérons un univers tridimensionnel (espace plan + temps). Les extrémités des vecteurs unitaires (d'échelle) du temps constituent la nappe supérieure ($t > 0$) d'un hyperboloïde à deux nappes. A chaque axe t correspond sur l'hyperboloïde un certain point que nous noterons A, comme plus haut.

2. Poincaré démontra*) que si on convient d'appeler : *droite* — section diamétrale plane d'un hyperboloïde à deux nappes ; *cercle* — section plane non diamétrale de ces surfaces ; *angle* entre deux sections diamétrales planes (« droites ») passant par un point quelconque de la surface d'un hyperboloïde à deux nappes — quotient par $\sqrt{-1}$ du logarithme du rapport anharmonique d'une paire de génératrices rectilignes imaginaires et d'une paire de tangentes à ces deux sections diamétrales ; *longueur* d'un segment d'une section diamétrale — logarithme du rapport anharmonique des deux extrémités du segment et de deux points à l'infini appartenant à une section conique, on obtient le système des dénominations de la géométrie de Lobatchevski.

3. Pour une raison de commodité représentons la nappe de l'hyperboloïde ($t > 0$) par une application conique sur un plan π orthogonal à l'axe t (fig. 169).

La représentation du plan de Lobatchevski se fait sur l'intérieur d'un cercle (application d'un cône circulaire asymptotique).

Nous noterons les images des points par les mêmes lettres. Les « droites » passant par le point A seront des droites euclidiennes. Toutes les autres seront des droites « orthogonales » au cercle de base (que l'on appellera l'absolu) (fig. 170). Nous obtenons une application spécifique du plan de Lobatchevski. Dans Acta Mathematica (V.1) Poincaré donna une application plus intéressante. Lobatchevski énonça un théorème selon lequel la géométrie du plan de Lobatchevski coïncide avec la géométrie sur une sphère de rayon imaginaire. Nous utiliserons largement ce théorème.

4. Je laisserai de côté la démonstration des formules principales de la géométrie de Lobatchevski et j'utiliserai pour simplifier un théorème

*) Poincaré H. *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie.* Œuvres t. XI, p. 79 à 81 ; Bull. Soc. math. (Paris), 1887, v. 15, p. 203 à 216.
Appell P. *Traité de mécanique rationnelle.* Paris : G — V, 1921-1926, v. 5.

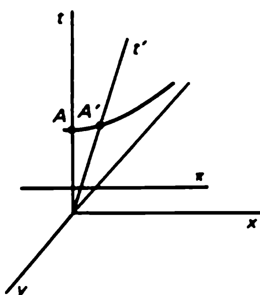


Fig. 169

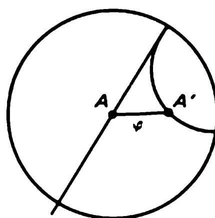


Fig. 170

démontré par Lobatchevski : les formules de sa géométrie coïncident avec les formules de la géométrie sphérique sur une sphère de rayon imaginaire i :

$$i \sin \frac{x}{i} = \operatorname{sh} x, \quad \cos \frac{x}{i} = \operatorname{ch} x.$$

Nous supposerons connues les formules de la géométrie sphérique.

5. Considérons l'équation paramétrique de l'hyperbole

$$t = \operatorname{ch} \varphi, \quad x = \operatorname{sh} \varphi, \quad t^2 - x^2 = \operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1 ;$$

φ est la longueur au sens de Lobatchevski. Quel est le sens de φ ? C'est le double de l'aire hachurée (fig. 171). On a en effet

$$\int_0^{\varphi} \left(-x \frac{dt}{d\varphi} + t \frac{dx}{d\varphi} \right) d\varphi = \int_0^{\varphi} (-\operatorname{sh}^2 \varphi + \operatorname{ch}^2 \varphi) d\varphi = +\varphi.$$

Posons que $\varphi = 0$ pour un observateur fixe

$$t = \operatorname{ch} \varphi, \quad x = \operatorname{sh} \varphi.$$

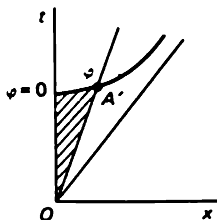


Fig. 171

Pour un observateur mobile $-\varphi = \varphi_0$. On a :

$$t' = \text{ch}\,(\varphi - \varphi_0), \quad x' = \text{sh}\,(\varphi - \varphi_0), \quad t'^2 - x'^2 = 1,$$
$$t' = \text{ch}\,(\varphi - \varphi_0) = \text{ch}\,\varphi\,\text{ch}\,\varphi_0 - \text{sh}\,\varphi\,\text{sh}\,\varphi_0 = t\,\text{ch}\,\varphi_0 - x\,\text{sh}\,\varphi_0, \quad (2)$$
$$x' = \text{sh}\,(\varphi - \varphi_0) = \text{sh}\,\varphi\,\text{ch}\,\varphi_0 - \text{ch}\,\varphi\,\text{sh}\,\varphi_0 = x\,\text{ch}\,\varphi_0 - t\,\text{sh}\,\varphi_0.$$

Si les coordonnées du point A' sont

$$x^0 = \text{sh}\,\varphi_0, \quad t^0 = \text{ch}\,\varphi_0,$$

on aura

$$\frac{x^0}{t^0} = \text{th}\,\varphi_0 = v$$

et les formules (2) prennent la forme des transformations de Lorentz

$$t' = \beta(t - xv), \quad x' = \beta(x - tv).$$

§ 4. Applications à la physique

Considérons maintenant les applications.

1. Loi de la composition des vitesses. Soient A un système fixe, B un système qui se déplace dans A suivant une direction donnée, C un système qui se déplace dans B en faisant un angle $\angle B$ avec la direction du mouvement de A par rapport à B.

Dans le plan de Lobatchevski cela donne un triangle ABC de côtés a, b, c (fig. 172). Comme th c est la vitesse du système B par rapport à A, th a est la vitesse du système C par rapport au système B, th b la vitesse du système C par rapport au système A, on aura

$$\text{ch}\,b = \text{ch}\,a\cdot\text{ch}\,c - \text{sh}\,a\cdot\text{sh}\,c\cos B.$$

Cette formule exprime la loi de la composition des vitesses d'Einstein (on la trouve chez Poincaré)*).

2. Considérons le cas où les directions des mouvements des systèmes B et C coïncident. L'angle B sera égal à zéro si le mouvement de B par rapport à A et le mouvement de C par rapport à B s'effectuent en sens contraire ; cet angle sera égal à π si ces deux mouvements s'effectuent dans le même sens (fig. 173). Nous avons

$$\text{th}\,b = \text{th}\,(c \pm a) = \frac{\text{th}\,c \pm \text{th}\,a}{1 \pm \text{th}\,a\,\text{th}\,c}.$$

*) Voir la note au bas de la page 361.

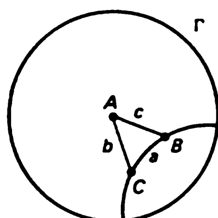


Fig. 172

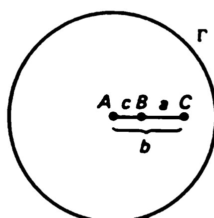


Fig. 173

Dans le premier cas on prendra le signe « + » et dans le second le signe « − ».

3. Propagation d'ondes harmoniques planes. Supposons qu'une onde harmonique plane se propage dans l'univers le long de l'axe x à une vitesse constante v. Dans le référentiel où l'observateur A est au repos, les points de même phase constitueront dans l'univers un système de plans parallèles (fig. 174). Le plan S de la phase passant par O détermine la section diamétrale de la nappe ($t > 0$) de l'hyperboloïde à deux nappes à condition que la vitesse de l'onde soit inférieure à celle de la lumière. Dans le plan de Lobatchevski on trouve à la place de la section S la droite s (fig. 175).

Soit φ la longueur non euclidienne de la perpendiculaire abaissée de A sur s.

La vitesse de propagation v de l'onde est égale au rapport du chemin parcouru $DK = \text{sh}\ \varphi$ au temps mis à le parcourir $OD = \text{ch}\ \varphi$ (fig. 174) :

$$v = \text{th}\ \varphi.$$

Dans le référentiel A le sens de propagation de l'onde coïncide avec celui de la perpendiculaire AK abaissée de A sur la droite s.

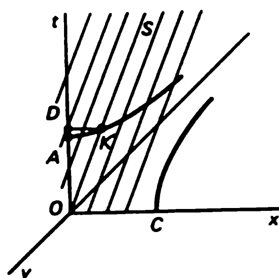


Fig. 174

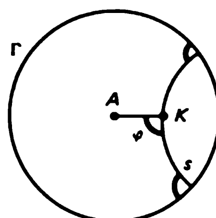


Fig. 175

La droite s sera le lieu d'application des axes chronoscopiques pour lesquels l'onde paraît stationnaire (th 0 = 0). Supposons que μ longueurs d'onde sont continues dans le segment OC ($1/\mu$ sera égal à la longueur d'onde pour l'observateur A) et ν longueurs d'onde sont continues dans le segment OA (ν est la fréquence de l'onde pour l'observateur A). Dans le triangle ODK le segment DK intercepte μ sh φ ondes et le segment OD intercepte ν ch φ ondes. Comme le nombre d'ondes interceptées par OD et DK est le même, on a

$$\mu \operatorname{sh} \varphi = \nu \operatorname{ch} \varphi$$

ou

$$\frac{\mu}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{\nu}{\operatorname{sh} \varphi} \qquad (= x).$$

4. Si deux observateurs situés dans deux référentiels A et A' tels que A' se déplace dans le sens de propagation de l'onde dans A observent la même onde, on aura dans le plan de Lobatchevski (fig. 176)

$$\operatorname{th} \varphi' \equiv \operatorname{th}(\varphi - u) = \frac{\operatorname{th} \varphi - \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} \varphi \operatorname{th} u}.$$

L'expérience de Fizeau. Dans le fluide A' l'onde se propage avec la vitesse th φ'. Le fluide A' se déplace dans le référentiel A suivant la direction de l'onde à la vitesse th u. Quelle sera la vitesse de l'onde par rapport au référentiel A ? On a

$$\operatorname{th} \varphi = \operatorname{th}(\varphi' + u) = \frac{\operatorname{th} \varphi' + \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th} \varphi' \operatorname{th} u} = \operatorname{th} \varphi' + \operatorname{th} u(1 - \operatorname{th}^2 \varphi') + \ldots$$

Le coefficient $1 - \operatorname{th}^2 \varphi'$ est le coefficient d'entraînement de Fizeau-Fresnel. Déterminons la variation des fréquences. Le nombre d'ondes interceptant le segment OA' (ν' — fréquence de l'onde dans le référentiel A') est égal au nombre d'ondes interceptant le segment OB (ν ch u) moins le nombre d'ondes interceptant le segment BA' (μ sh u, i.e. $\nu' = \nu$ ch u −

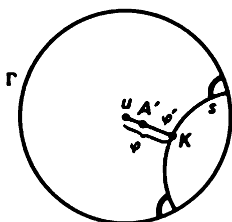


Fig. 176

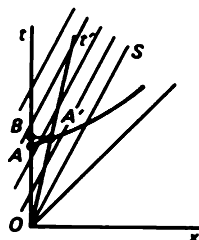


Fig. 177

$- \mu$ sh u) (fig. 177). On peut donc écrire

$$\nu' = x(\text{sh}\,\varphi\,\text{ch}\,u - \text{ch}\,\varphi\,\text{sh}\,u) = x\,\text{sh}\,(\varphi - u) = x\,\text{sh}\,\varphi',$$

d'où

$$\frac{\nu'}{\text{sh}\,\varphi'} = x = \frac{\nu}{\text{sh}\,\varphi} \text{ — l'invariant.}$$

Effet Doppler. Nous venons de voir que la variation de la fréquence est donnée par la formule

$$\nu' = \nu\,\text{ch}\,u - \mu\,\text{sh}\,u = \nu\left(\text{ch}\,u - \frac{\text{sh}\,u}{\text{th}\,\varphi}\right).$$

Si s désigne une onde lumineuse se propageant dans le vide, th $\varphi = 1$ et on aura alors

$$\nu' = \nu(\text{ch}\,u - \text{sh}\,u) = \nu\frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} = \nu\sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} \quad (v = \text{th}\,u).$$

C'est la formule de l'effet Doppler.

Signification de l'invariant x :

$$x = \frac{\bar{\mu}}{\text{ch}\,\bar{\varphi}}.$$

Lorsque $\bar{\varphi} = 0$, ch $\bar{\varphi} = 1$ et x représente le nombre de longueurs d'onde contenues dans le segment unitaire OC pour un observateur pour lequel l'onde est stationnaire (th $\bar{\varphi} = 0$).

5. Cas général. Posons que le référentiel A' effectue un mouvement de translation dans un référentiel fixe A sous un angle α par rapport à la normale à l'onde s (fig. 178). Selon la géométrie de Lobatchevski

$$\text{sh}\,a = \text{sh}\,b\,\text{ch}\,c - \text{sh}\,c\,\text{ch}\,b\cos\alpha.$$

D'après la figure 178

$$\text{sh}\,\varphi' = \text{sh}\,\varphi\,\text{ch}\,u - \text{sh}\,u\,\text{ch}\,\varphi\cos\alpha.$$

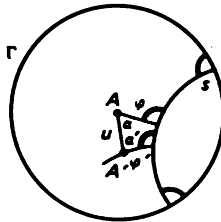


Fig. 178

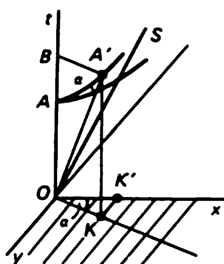


Fig. 179

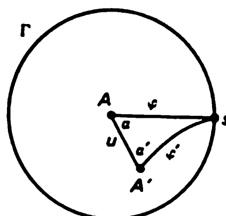


Fig. 180

Cette formule permet d'interpréter une expérience plus compliquée de Fizeau.

Supposons qu'un fluide se déplace dans le référentiel A avec une vitesse th u et que dans ce fluide se propage une onde s avec une vitesse th φ faisant un angle α avec la direction du mouvement de A' par rapport à A. La formule ci-dessus permet de déterminer la vitesse th φ'.

Considérons maintenant le cas où le fluide est animé d'une vitesse th u ; dans ce fluide se propage une onde avec la vitesse th φ'. En notant α l'angle que fait la vitesse de l'onde avec la vitesse de l'observateur, la formule donnée plus haut permet de calculer la vitesse de l'onde pour un observateur fixe A. La loi de variation de la fréquence se laisse déterminer aussi simplement que dans le cas précédent (fig. 179). Le segment OA' intercepte autant d'ondes ν' (ν' — fréquence dans le référentiel A') que le segment OB (ν ch u) moins le nombre d'ondes interceptant le segment BA' ; or BA' intercepte autant d'ondes que OK, donc μ(sh u cos α) ondes. Par conséquent

$$\nu' = \nu \operatorname{ch} u - \mu \operatorname{sh} u \cos \alpha,$$

ou

$$\nu' = x(\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} u \cos \alpha) = x \operatorname{sh} \varphi'.$$

On en tire l'invariant $x = \dfrac{\nu'}{\operatorname{sh} \varphi'}$. Il s'ensuit

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\operatorname{sh} \varphi'}{\operatorname{sh} \varphi} = \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \frac{\cos \alpha}{\operatorname{th} \varphi} = \operatorname{ch} u \left(1 - \frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{th} \varphi} \cos \alpha\right).$$

C'est l'effet Doppler.

6. Un observateur au repos A et un observateur mobile A' observent une même onde lumineuse se propageant dans le vide avec la vitesse de

la lumière prise pour unité. Dans le plan de Lobatchevski l'onde s se réduira à un point sur l'absolu (fig. 180). Dans le triangle $AA's$ l'angle s est égal à zéro. En utilisant les analogies de Napier*)

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{ch}\frac{a+b}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sh}\frac{a+b}{2}}.$$

Utilisons la seconde formule en posant $A=\alpha$, $B=0$, $C=\alpha'$; $a=\varphi'$,

$b=u,\quad c=\varphi,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha'}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi'-u}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\varphi'+u}{2}}$. Mais comme $\operatorname{th}\frac{\varphi'}{2}=$

$\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}=1$, on a

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}=$$

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{ch}\frac{u}{2}-\operatorname{ch}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{sh}\frac{u}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{ch}\frac{u}{2}+\operatorname{ch}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{sh}\frac{u}{2}}=\frac{\operatorname{th}\frac{\varphi'}{2}-\operatorname{th}\frac{u}{2}}{\operatorname{th}\frac{\varphi'}{2}+\operatorname{th}\frac{u}{2}}=\frac{1-\operatorname{th}\frac{u}{2}}{1+\operatorname{th}\frac{u}{2}}=$$

$$\frac{e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}}-\left(e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}\right)}{e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}}+e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}}=e^{-u},$$

i.e. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}=e^{-u}$.

Cette formule explique le phénomène d'aberration.

7. Un cas intéressant est celui où $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha'=\Pi(u)$ (fig. 181). L'angle α' est égal à l'angle de parallélisme de Lobatchevski. La formule précédente se réduit à la formule fondamentale de la géométrie de Lobatchevski

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(u)}{2}=e^{-u}.$$

8. Réflexion d'une onde lumineuse dans un miroir mobile. Un miroir B exécute un mouvement de translation avec la vitesse th u dans un référen-

*) A, B, C sont les angles du triangle ; a, b, c sont ses côtés.

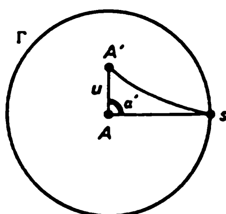


Fig. 181

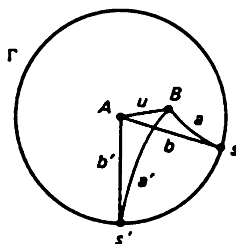


Fig. 182

tiel au repos A (fig. 182). La normale au miroir est orientée suivant la vitesse de ce dernier. Une onde lumineuse plane s tombe sur le miroir et s'y réfléchit en une onde s' ; s et s' se situent sur l'absolu Γ. Notons les angles en A et B dans les triangles ABs et ABs' respectivement par α, β et α', β'. Dans le référentiel B du miroir mobile c'est la loi ordinaire de la réflexion qui s'applique : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion :

$$\beta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta', \quad \cos \beta = -\cos \beta',$$

soit

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta'}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\beta'}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = 1.$$

Les formules d'aberration pour les rayons s et s' sont :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = e^{-u}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = e^{-u}.$$

En égalant les premiers membres

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2}$$

on obtient

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}.$$

Après multiplication

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = e^{-2u} = \frac{e^u - e^{-u} - (e^u - e^{-u})}{e^u - e^{-u} + (e^u - e^{-u})} = \frac{1 - \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th} u},$$

on obtient finalement la formule

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2} = \frac{1 - \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th} u}.$$

Pour l'observateur B qui se déplace avec le miroir la longueur de l'onde incidente est égale à celle de l'onde réfléchie : $\mu = \mu'$,

$$x = \frac{\mu}{\operatorname{ch} a} = \frac{\mu'}{\operatorname{ch} a'}, \qquad \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a'} = 1.$$

Pour l'observateur au repos

$$\frac{\nu_{\text{ref}}}{\nu_{\text{inc}}} = \frac{\operatorname{sh} b'}{\operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sh} a' \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} a' \operatorname{sh} u \cos\beta'}{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} u \cos\beta} =$$

$$\frac{\operatorname{th} a' \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \cos\beta'}{\operatorname{th} a \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \cos\beta}\,\frac{\operatorname{ch} a'}{\operatorname{ch} a} =$$

$$\frac{1 - \operatorname{th} u \cos\alpha + \operatorname{th} u \cos\alpha - \operatorname{th}^2 u}{1 - \operatorname{th} u \cos\alpha - \operatorname{th} u \cos\alpha + \operatorname{th}^2 u} = \frac{1 - \operatorname{th}^2 u}{1 - 2 \operatorname{th} u \cos\alpha + \operatorname{th}^2 u},$$

d'où

$$\frac{\nu_{\text{inc}}}{\nu_{\text{ref}}} = \operatorname{ch}^2 u(1 - 2 \operatorname{th} u \cos\alpha + \operatorname{th}^2 u).$$

9. En qualité de problème on pourra étudier le cas où la normale au plan du miroir fait un angle $\varphi \neq 0$ avec la direction de son mouvement.

On peut analyser aussi les lois de la réfraction de la lumière à la frontière de deux milieux en mouvement. Comme dans les problèmes relatifs à la réfraction la vitesse de l'onde doit être inférieure à l'unité, le calcul ne sera pas tellement simple. On peut le simplifier en y faisant intervenir la région idéale du plan de Lobatchevski se trouvant au-delà de l'absolu et correspondant, selon Poincaré, à un hyperboloïde à une nappe. Dans cette région l'onde s peut être représentée par un seul point correspondant à la normale à l'onde dans le référentiel où l'onde paraît être stationnaire.

§ 5

1. Considérons l'univers quadridimensionnel de Minkowski (espace tridimensionnel + temps). Le lieu géométrique du faisceau de vecteurs unitaires de temps sera une nappe de l'hyperboloïde à deux nappes. Selon Poincaré, la métrique de ce faisceau de vecteurs coïncide avec celle de l'espace tridimensionnel de Lobatchevski.

Ainsi, à tout point de l'espace de Lobatchevski correspond une certaine direction du temps de l'univers de Minkowski. Les angles auprès du point

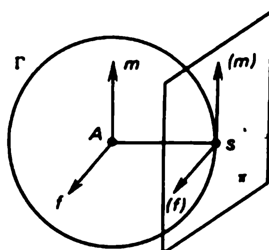


Fig. 183

A seront mesurés comme des angles entre des directions purement spatiales dans le référentiel *A*.

On peut faire une application de l'espace de Lobatchevski dans une sphère de rayon unité, comme le fit Poincaré, ou en généralisant l'artifice que l'auteur a préconisé dans le § 4.

Nous utiliserons cette dernière méthode, quoique les angles mesurés partout hors le centre ne peuvent être mesurés comme usuellement. En contrepartie, dans cette représentation les « droites » se conservent, tandis que dans le procédé de Poincaré ce sont les angles qui se conservent.

2. Nous considérerons les phénomènes électromagnétiques : le champ électromagnétique dans le vide.

Soit *A* un observateur au repos. Une onde électromagnétique (onde lumineuse) se propage le long de l'axe x d'un référentiel où l'observateur est au repos (fig. 183).

Dans l'espace de Lobatchevski à l'onde correspond un point s sur l'absolu, puisque la vitesse de l'onde est égale à 1. Dans l'espace de Minkowski la direction m du vecteur magnétique et la direction f du vecteur électrique doivent être orthogonales à la direction de propagation de l'onde. On prendra la direction de f pour axe y et la direction de m pour axe z.

Menons les plans par l'axe du temps t et les axes y et z ; ils couperont le superhyperboloïde suivant les lignes Af et Am.

Dans l'espace de Lobatchevski faisons passer par les axes y et z des plans contenant As. Ces plans couperont le plan π tangent à l'absolu au point s suivant les directions de (f) et (m).

3. Si on se souvient des propriétés des hélices de l'espace de Lobatchevski*), on constatera que les directions des vecteurs électrique et magnétique dans une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide définissent les directions d'une hélice dont les axes principaux (f) et

*) Kotelnikov A. *Théorie des projections des vecteurs*. Univ. de Kazan', 1899.

(m) sont orthogonaux et touchent l'absolu au point s. Le plan de réduction (le plan contenant f et m) pour le point A touche en ce dernier point la surface limite passant par le point A et le centre s des axes principaux de l'hélice.

4. Nous allons démontrer que les formules de transformation de Lorentz appliquées au champ électromagnétique sont des formules de réduction de l'hélice à une nouvelle origine.

Supposons que pour le point A l'hélice construite sur les axes orthogonaux x_1, x_2, x_3 présente les composantes suivantes : $\xi_i = f_i + m_i\sqrt{-1}$ ($i = 1, 2, 3$). Si pour le point A' les axes de coordonnées x_i' forment avec les axes x_i des *angles complexes* dont les cosinus sont α_{ki}, les composantes de l'hélice dans le référentiel A' sont

$$\xi_k' = \sum \alpha_{ki}\xi_i.$$

On entend par angle complexe entre deux droites contenues dans l'espace de Lobatchevski le nombre

$$\theta = \lambda\sqrt{-1},$$

θ étant l'angle entre les droites, λ la plus petite distance entre les droites (fig. 184).

Explicitons la matrice $\|\alpha_{ki}\|$ des cosinus des angles formés par les axes x_k' et x_i dans les cas illustrés par la figure 185. En comptant les angles des axes anciens vers les axes nouveaux on obtient :

$$\angle(x', x) = 0, \qquad \alpha_{11} = \cos 0 = 1,$$

$$\angle(x', y) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_{12} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\angle(x', z) = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_{13} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\angle(y', x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_{21} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\angle(y', y) = \varphi\sqrt{-1}, \qquad \alpha_{22} = \cos\varphi\sqrt{-1} = \operatorname{ch}\varphi,$$

$$\angle(y', z) = -\frac{\pi}{2} + \varphi\sqrt{-1}, \qquad \alpha_{23} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\operatorname{sh}\varphi,$$

$$\angle(z', x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_{31} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\angle(z', y) = \frac{\pi}{2} + \varphi\sqrt{-1}, \qquad \alpha_{32} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}\operatorname{sh}\varphi,$$

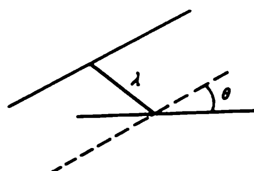


Fig. 184

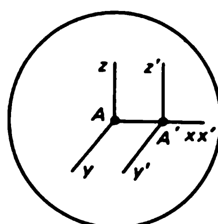


Fig. 185

$$\angle(z', z) = \varphi\sqrt{-1}, \qquad \alpha_{33} = \cos\varphi\sqrt{-1} = \operatorname{ch}\varphi,$$

$$-\sin i\varphi = -\frac{(e^{-\varphi} - e^{\varphi})}{2i} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2i} = -i\operatorname{sh}\varphi,$$

$$\operatorname{sh} i\varphi = \frac{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}}{2i} = i\,\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = i\sin\varphi.$$

La matrice des cosinus directeurs est de la forme

	x	y	z
x'	1	0	0
y'	0	ch φ	i sh φ
z'	0	$-i$ sh φ	ch φ

Si dans le référentiel A l'hélice avait pour coordonnées

$$f_j + m_j\sqrt{-1},$$

dans le référentiel A' il aura pour coordonnées

$$\xi_1' = f_1 + m_1\sqrt{-1},$$

$$\xi_2' = \sum\alpha_{2j}\xi_j = \operatorname{ch}\varphi(f_2 + m_2\sqrt{-1}) + i\operatorname{sh}\varphi\,(f_3 + m_3\sqrt{-1}) =$$
$$(f_2\operatorname{ch}\varphi - m_3\operatorname{sh}\varphi) + \sqrt{-1}(m_2\operatorname{ch}\varphi + f_3\operatorname{sh}\varphi),$$

$$\xi_3' = \sum\alpha_{3j}\xi_j = -\sqrt{-1}\operatorname{sh}\varphi(f_2 + m_2\sqrt{-1}) + \operatorname{ch}\varphi(f_3 + m_3\sqrt{-1}) =$$
$$(f_3\operatorname{ch}\varphi + m_2\operatorname{sh}\varphi) + \sqrt{-1}(m_3\operatorname{ch}\varphi - f_2\operatorname{sh}\varphi).$$

La comparaison de ces formules avec les formules de Poincaré (1) montre que la transformation des vecteurs électrique et magnétique coïncide avec la transformation de l'hélice dans l'espace de Lobatchevski.

§ 6

1. L'application de la géométrie de Lobatchevski que nous avons considérée a donné des résultats remarquables. Les principaux résultats du principe de la relativité dans l'interprétation de Poincaré sont devenus évidents.

La transformation de Lorentz découle de l'hypothèse que les équations électromagnétiques de Maxwell seront formulées de la même façon par un observateur au repos et par un autre observateur animé d'un mouvement de translation par rapport au premier. Mais ce second observateur peut être animé d'un mouvement autre qu'uniforme et rectiligne. Que deviendra alors la théorie ? Pour pouvoir généraliser il faut disposer des moyens analytiques d'étude du postulat de la relativité.

2. Soit c la vitesse de la lumière dans le vide. Les transformations de Lorentz

$$t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad x' = \beta(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

possèdent, outre les équations de Maxwell, l'invariant algébrique suivant :

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Ce dernier détermine la métrique de l'espace-temps. C'est Minkowski qui mit en évidence cette métrique.

Dans l'univers de l'observateur au repos (A) les vecteurs sont définis par leurs projections sur les axes t, x, y, z (fig. 186). Par exemple,

$$\overline{OA'}(t, x, y, z), \quad \overline{OC'}(t_1, x_1, y_1, z_1).$$

Si le vecteur $\overline{OC'}$ est parallèle au plan D qui est tangent à l'hyperboloïde au point A', l'observateur mobile (A') percevra la direction $\overline{OC'}$ tout spatialement comme *orthogonale* à l'axe $\overline{OA'}$.

Cette propriété constitue la principale caractéristique métrique de l'orthogonalité de deux vecteurs.

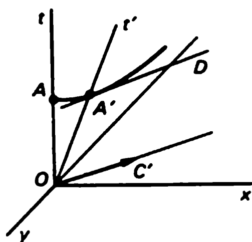


Fig. 186

En notant T, X, Y, Z les coordonnées courantes d'un point du plan D, on déduit de l'équation du plan tangent $c^2tT - xX - yY - zZ = 0$ l'équation

$$c^2tt_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1 = 0.$$

L'échelle est donnée par l'invariant algébrique.

Grâce aux merveilleux résultats de Poincaré nous avons été en mesure d'étudier cette métrique de l'univers à travers l'application dans l'espace de Lobatchevski.

Pour l'étude des phénomènes naturels les scientifiques utilisent avec succès la méthode des infiniment petits, i.e. un procédé de réduction des phénomènes.

3. Considérons la ligne d'univers (fig. 187). Si cette ligne reflète l'évolution d'un phénomène physique, la vitesse de déplacement du point figuratif ne saurait être supérieure à la vitesse de la lumière ; il s'ensuit que la tangente à la ligne d'univers sera toujours plus raide que les génératrices du cône asymptotique.

Considérons un élément ds de la ligne d'univers ; pour un observateur fixe les projections de ds sont dt, dx, dy, dz. Pour un observateur mobile les projections de ds seront (en vertu des transformations de Lorentz) :

$$dt' = \beta\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right), \quad dx' = \beta(dx - v\,dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

On en déduit l'invariant

$$c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 = c^2d\tau,$$

où τ est le temps propre du point considéré.

Nous avons donc trouvé l'expression d'un élément de longueur dans notre univers. Cette expression détermine la métrique de l'univers. Quel est donc cet espace ?

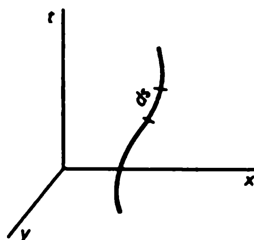


Fig. 187

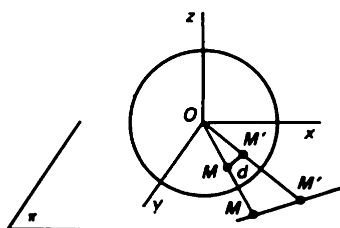


Fig. 188

4. L'expression d'un élément différentiel d'un élément orienté spatialement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

(qui reste invariante dans les transformations de Lorentz) représente la longueur ds d'un segment dans les référentiels où ds est au repos à l'instant correspondant.

L'expression de ds^2 montre que la métrique de l'univers n'est pas euclidienne. Cherchons l'espace dans lequel un élément d'arc s'exprime par la formule ci-dessus. Considérons d'abord un cas simple.

Soit une sphère de rayon R et de centre O (fig. 188) ; notons π son plan tangent ; x, y, z les coordonnées cartésiennes dont l'origine se trouve au point O. Réalisons l'application de la sphère sur le plan π à l'aide des rayons issus du centre O. Aux droites correspondent les arcs des grands cercles. La distance non euclidienne entre les points M, M' du plan π doit être déterminée par la distance entre les points pris sur la sphère*).

Déterminons cette distance autrement. L'équation de la sphère est :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées des points M et M' sur la sphère. On aura

$$R^2 \cos\frac{d}{R} = xx' + yy' + zz'.$$

Le cône isotrope

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

*) La distance entre deux points pris sur la sphère est mesurée sur l'arc du grand cercle passant par ces points.

coupe le plan π suivant la section conique P (que l'on appelle *section absolue*). Les coordonnées x, y, z des points de la sphère sont les coordonnées projectives des points M du plan π.

Soient N_1 et N_2 deux points (conjugués complexes) où la droite MM' coupe la section absolue. Les coordonnées d'un point courant sur la droite MM' peuvent s'écrire comme suit :

$$x + \lambda x', \quad y + \lambda y', \quad z + \lambda z'.$$

Posons qu'au point M correspond $\lambda = 0$, au point M' $\lambda = \infty$, au point N_1 $\lambda = \lambda_1$ et au point N_2 $\lambda = \lambda_2$. Les valeurs de λ_1 et λ_2 se laissent déterminer par la condition que les points N_1 et N_2 appartiennent à la section absolue :

$$\lambda^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2\lambda(xx' + yy' + zz') + x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

On en tire

$$\lambda^2 + 2\lambda \cos\frac{d}{R} + 1 = 0$$

et par suite

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\cos\frac{d}{R}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Posons $\lambda_1 = ke^{i\varphi}$, $\lambda_2 = ke^{-i\varphi}$; de ce qui précède on obtient

$$k^2 = 1 \quad \text{et} \quad k \cdot 2\cos\varphi = -2\cos\frac{d}{R},$$

$$k = -1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{d}{R}.$$

Le rapport anharmonique est

$$(MM'N_1N_2) = (0, \infty, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{0 - \lambda_1}{0 - \lambda_2}\,\frac{\infty - \lambda_2}{\infty - \lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2i\varphi} = e^{2i\frac{d}{R}},$$

ce qui entraîne

$$d = \frac{R}{2i}\ln(MM'N_1N_2).$$

Il s'ensuit que la distance d peut être déterminée (Cayley) par le produit de $R/2i$ par le logarithme du rapport anharmonique des quatre points M, M', N_1, N_2.

Définissons l'angle entre les droites dans le plan π par l'angle entre les grands cercles correspondants de la sphère R. On peut déterminer cet angle par projection.

Au point de tangence sur le plan π les angles sont mesurés selon le procédé usuel. Supposons que soit donné l'angle au point M. L'angle est déterminé par les tangentes aux grands cercles concernés. Transportons les tangentes au centre O et menons une sphère de rayon unité. Les angles seront mesurés par les arcs des grands cercles de la sphère unitaire. En utilisant les résultats ci-dessus on trouve l'angle φ :

$$\varphi = \frac{1}{2i} \ln (m_1 m_2 n_1 n_2),$$

n_1 et n_2 sont les tangentes à la section absolue passant par le point M ; m_1 et m_2 sont les côtés de l'angle dont le sommet se trouve au point M (sur le plan π). Nous allons établir l'expression de la différentielle de l'arc dans le plan π.

Considérons le point A où la sphère touche le plan (fig. 189). Déterminons le point A par le vecteur $\overline{OA}$; dans le plan π définissons les vecteurs unitaires othogonaux $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$. Le vecteur $\overline{OM}$ définissant le point M de la sphère sera donné par

$$\overline{OM} = t\,\overline{OA} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\,;$$

t, x, y sont certaines quantités. Comme $\overline{OA}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ sont orthogonaux, on en tire

$$\overline{OM^2} = R^2 = R^2 t^2 + x^2 + y^2.$$

Prenons un point M' infiniment proche du point M :

$$\overline{OM'} = (t + dt)\overline{OA} + (x + dx)\mathbf{e}_1 + (y + dy)\mathbf{e}_2.$$

Posons que $\mathbf{ds}$ est $\overline{MM'}$; on aura alors

$$\mathbf{ds} = dt\,\overline{OA} + dx\,\mathbf{e}_1 + dy\,\mathbf{e}_2,$$

et par suite

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + R^2 dt^2.$$

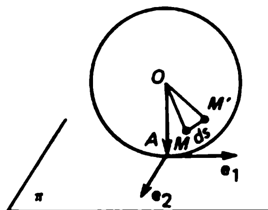


Fig. 189

Cette expression ne diffère de l'expression de ds^2 de l'univers du principe de la relativité que par le signe du dernier terme. Si on pose $R = c\sqrt{-1}$, l'expression de ds^2 de l'univers tridimensionnel coïncide avec l'expression de l'élément d'arc d'une sphère de rayon imaginaire.

Nous avons déjà signalé que la géométrie sur une sphère de rayon imaginaire est précisément la géométrie de Lobatchevski.

§ 7. Dynamique du point matériel

1. Notons τ le temps propre d'un point matériel mobile :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

En posant $\dot{f} \equiv df/d\tau$ définissons l'impulsion par ses composantes

$$m_0\dot{x},\ m_0\dot{y},\ m_0\dot{z},\ m_0\dot{t},$$

où m_0 est la masse au repos.

Les composantes du vecteur impulsion ainsi définies se transforment comme les coordonnées x, y, z, t à l'aide des formules de transformation de Lorentz.

Cette définition s'avère suffisante pour que la loi de Newton devienne covariante par rapport au groupe de Lorentz, ce qui nous conduit à la dynamique du principe de la relativité.

Associons à la loi de Newton

$$\frac{d}{dt}(m_0\dot{x}) = X,\quad \frac{d}{dt}(m_0\dot{y}) = Y,\quad \frac{d}{dt}(m_0\dot{z}) = Z,$$

ou, ce qui revient au même, associons aux équations

$$m_0\ddot{x} = \dot{t}X,\quad m_0\ddot{y} = \dot{t}Y,\quad m_0\ddot{z} = \dot{t}Z$$

l'équation

$$m_0\ddot{t} = \dot{t}T.$$

Les premiers membres définissent le vecteur total de l'univers

$$m_0\ddot{x},\quad m_0\ddot{y},\quad m_0\ddot{z},\quad m_0\ddot{t}$$

qui se transforme comme les coordonnées x, y, z, t, à l'aide des formules de transformation de Lorentz, puisque m_0 est une constante et $d\tau$ est un invariant.

Calculons T. On a

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

d'où $c^2 = c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2$ et en dérivant par rapport à τ

$$0 = c^2\dot{t}\ddot{t} - \ddot{x}\dot{x} - \ddot{y}\dot{y} - \ddot{z}\dot{z}.$$

Multiplions les deux membres par m_0 :

$$c^2\dot{t}T = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z},$$

ce qui entraîne

$$T = \frac{1}{c^2}\left(X\frac{\dot{x}}{\dot{t}} + Y\frac{\dot{y}}{\dot{t}} + Z\frac{\dot{z}}{\dot{t}}\right)$$

ou

$$T = \frac{1}{c^2}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right).$$

On a obtenu le quotient de la puissance par c^2.

Les équations de la dynamique

$$m_0\ddot{x} = \dot{t}X, \quad m_0\ddot{y} = \dot{t}Y, \quad m_0\ddot{z} = \dot{t}Z, \quad m_0\ddot{t} = \dot{t}T$$

montrent que les quantités $X\dot{t}$, $Y\dot{t}$, $Z\dot{t}$, $T\dot{t}$ se transforment comme les coordonnées selon les formules de Lorentz. Cela signifie que nos équations de la dynamique sont covariantes par rapport au groupe de Lorentz.

2. L'observateur au repos entend par quantité de mouvement un vecteur défini par ses composantes

$$m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}.$$

En identifiant ces expressions avec celle que nous avons utilisée pour la définition de la quantité de mouvement on obtient

$$m\frac{dx}{dt} = m_0\dot{x} = m_0\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}, \ \ldots$$

Ces résultats montrent que la masse relative m est liée à la masse au repos m_0 par la formule

$$m = m_0\frac{dt}{d\tau}.$$

Cela implique que m_0 est la masse dans un référentiel où un point mobile apparaît fixe.

La formule

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

permet d'écrire

$$c^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = c^2 - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

ou

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

où v est la vitesse du point matériel par rapport à un observateur fixe ; la masse relative est donc égale à

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

La quatrième composante du vecteur quantité de mouvement

$$m_0\dot{t} = m$$

est égale à la masse relative.

Si la vitesse v est petite (rapport v/c petit), on aura

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 + \frac{1}{2}m_0\frac{v^2}{c^2} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right),$$

$$m - m_0 = \frac{1/2\, m_0 v^2}{c^2} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right).$$

Ces formules montrent que la variation de la masse accompagnant une variation de la vitesse est égale au quotient de la force vive par c^2. Ainsi, pour un observateur au repos, la masse est équivalente à l'énergie (mc^2 étant l'énergie interne du corps) $m = \frac{E}{c^2}$. Le principe de la conservation de la masse s'est transformé en principe de la conservation de l'énergie.

3. Soit un point matériel se déplaçant le long de l'axe x avec la vitesse v. La quantité de mouvement est égale à

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ 0.$$

Augmentons la vitesse d'une quantité δv le long de l'axe x et d'une quantité δw le long de l'axe y. La quantité de mouvement devient égale à

$$\frac{m(v + \delta v)}{\sqrt{1 - \frac{(v + \delta v)^2 + \delta w^2}{c^2}}},\quad \frac{m\delta w}{\sqrt{1 - \frac{(v + \delta v)^2 + \delta w^2}{c^2}}}.$$

Aux quantités de second ordre de petitesse près la variation des impulsions est égale à

$$\frac{m\delta v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}, \quad \frac{m\delta w}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

soit

$$m\beta^3\delta v, \quad m\beta\delta w, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

La première composante $m\beta^3\delta v$ de l'impulsion est plus grande que la seconde $m\beta\delta w$. Jadis les quantités $m\beta^3$ et $m\beta$ étaient appelées masse longitudinale et masse transversale.

§ 8. Dynamique analytique du point

1. Nous avons défini les impulsions par les relations

$$p_1 = m_0\dot{x} = m_0\frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt}, \quad p_2 = m_0\frac{dt}{d\tau}\frac{dy}{dt}, \quad p_3 = m_0\frac{dt}{d\tau}\frac{dz}{dt};$$

mais comme

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

les impulsions seront égales à

$$p_1 = \frac{m_0\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_2 = \frac{m_0\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_3 = \frac{m_0\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Définissons la fonction T^* de telle façon que $p_\nu = \frac{\partial T^*}{\partial x'_\nu}$; on trouve

$$T^* = -m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

2. Dans le cas de forces conservatives les équations différentielles du mouvement s'écriront comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) - \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0y'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) - \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0z'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) - \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Ces équations sont de la forme des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

à condition d'entendre par q_i les coordonnées cartésiennes orthogonales x, y, z et par L la quantité

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U,$$

ce qui donne

$$L = T^* + U ;$$

T^* n'est pas la force vive du point. La force vive et l'énergie propre sont données par

$$m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

3. Conformément aux équations du mouvement sous la forme de Lagrange, le principe variationnel de Hamilton s'écrira en dynamique relativiste du point matériel sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0.$$

Si les limites sont fixes, la fonction d'action sera définie par l'intégrale

$$V = \int_{t_0}^{t} L\,dt,$$

prise le long de la trajectoire réelle. En admettant que V est une fonction de t, x, y, z, x^0, y^0, z^0 on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = p_3,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = -p_1^0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = -p_2^0, \quad \frac{\partial V}{\partial z_0} = -p_3^0.$$

La démonstration s'effectue de la façon ordinaire.

4. Pour trouver les équations canoniques et la fonction de Hamilton H nous utiliserons la méthode préconisée par Poincaré :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[p_1 \frac{dx}{dt} + p_2 \frac{dy}{dt} + p_3 \frac{dz}{dt} - \left(p_1 \frac{dx}{dt} + p_2 \frac{dy}{dt} + p_3 \frac{dz}{dt} - L\right)\right] dt = 0.$$

Par suite

$$H = p_1 \frac{dx}{dt} + p_2 \frac{dy}{dt} + p_3 \frac{dz}{dt} - L.$$

La forme explicite de la fonction H est la suivante :

$$H = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right] - U = T - U.$$

Cela implique que H représente l'énergie totale. On a

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = m_0^2 c^2 \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)} = m_0^2 c^2 \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - 1\right),$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \cdot \frac{1}{m_0 c} = \sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2 c^2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}.$$

En termes des impulsions la fonction H s'écrit :

$$H = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2 c^2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} - U.$$

5. Une particularité importante du principe de la relativité restreinte est la forme de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + mc^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]} - U = 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} - U\right)^2 - m^2 c^4 \left\{1 + \frac{1}{m^2 c^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\right\} = 0.$$

L'équation de Jacobi contient maintenant le carré de la dérivée $\partial V/\partial t$. C'est ce qui amena Dirac à ses équations de la mécanique quantique.

§ 9

1. Considérons le cas général de la métrique quadratique

$$ds^2 = \sum g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

où dx^α sont les composantes du vecteur contravariant, $g_{\alpha\beta}$ est un tenseur fondamental.

Posons

$$dx^1 = dx, \quad dx^2 = dy, \quad dx^3 = dz, \quad dx^4 = c\,dt.$$

En relativité

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas de la transformation de la *coordonnée x du point* on a

$$dx'^{\mu} = \sum \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}.$$

2. Les quantités A^{α} qui se transforment par les formules

$$A'^{\mu} = \sum \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} A^{\nu}$$

seront désignées sous le nom de *vecteur* et les A^{α} sous le nom de ses composantes *contravariantes*.

Les quantités A_{α} seront appelées composantes *covariantes* du vecteur **A** si, pour un vecteur arbitraire **B**, $\sum A_{\nu}B^{\nu}$ est un invariant. Il en découle la transformation des composantes covariantes :

$$A'_{\mu} = \sum \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} A_{\nu}.$$

On conviendra d'omettre le signe de la somme.

3. Les tenseurs. Formation des tenseurs par multiplication des vecteurs.

1° $A^{\alpha\beta} = A^{\alpha}A^{\beta}$ — tenseur contravariant.

Formules de transformation :

$$A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{\mu}} A^{\nu\mu}.$$

2° $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha}A_{\beta}$ — tenseur covariant.

3° $A^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha}A_{\beta}$ — tenseur mixte.

Tenseurs symétriques :

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}; \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}.$$

Tenseurs antisymétriques :

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}; \quad A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}.$$

Si, quel que soit le tenseur $B^{\alpha\beta}$, $\sum A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}$ est un invariant, $A_{\alpha\beta}$ est un tenseur.

4° *Contraction interne de l'indice* : $A^{\alpha\cdot\beta}_{\cdot\alpha} = A^{\beta}$, $B_{\cdot\nu}^{\nu} = B$.

4. Transposition de l'indice.

Dans

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$dx^\alpha dx^\beta$ est un tenseur arbitraire et ds^2 un invariant. Il s'ensuit que $g_{\alpha\beta}$ est un tenseur covariant et $g_{\alpha\beta} A^\beta$ est un vecteur à composantes covariantes. Ce vecteur (qui dépend de A) sera noté $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$. C'est la définition des composantes covariantes et de la transposition de l'indice. Par suite $T^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma} = g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} T^{\alpha\mu\nu}$, etc.

5. Considérons le déterminant

$$g = \|g_{\alpha\beta}\|.$$

Soit $g^{\alpha\beta}$ le mineur (affecté de son signe) de l'élément $g_{\alpha\beta}$ divisé par g. On a

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu = \nu, \\ 0 & \text{si} \quad \mu \neq \nu. \end{cases}$$

D'où

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\beta dx^\alpha = g_{\beta\alpha} \delta^\beta_\nu dx^\nu dx^\alpha = g_{\alpha\beta} g_{\nu\sigma} g^{\beta\sigma} dx^\nu dx^\alpha =$$
$$g^{\beta\sigma} (g_{\alpha\beta} dx^\alpha)(g_{\nu\sigma} dx^\nu) = g^{\beta\sigma} dx_\beta dx_\sigma\,;$$

$dx_\beta dx_\sigma$ est un tenseur covariant, ce qui implique que $g^{\beta\sigma}$ est un tenseur contravariant.

§ 10

1. L'équation de la ligne géodésique est

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} ds = 0.$$

Introduisons un paramètre u ; supposons que sur des lignes comparables il possède les valeurs u_1 et u_0 pour P_1 et P_0. Il s'ensuit que

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} ds = \delta \int_{u_0}^{u_1} \frac{ds}{du}\, du = \int_{u_0}^{u_1} \delta \left(\frac{ds}{du}\right) du = 0.$$

Mais comme

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}\,,$$

$$2 \frac{ds}{du} \delta \left(\frac{ds}{du}\right) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} \delta x^\nu + 2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \delta \frac{dx^\beta}{du}$$

et que

$$\delta \frac{dx^\beta}{du} = \frac{d}{du}(\delta x^\beta),$$

on a

$$0 = \int_{u_0}^{u_1} du \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{dx^\nu}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du}\delta x^\nu + g_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{du}\delta\frac{dx^\nu}{du}\right]\frac{1}{(ds/du)},$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{(ds/du)} g_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{d\delta x^\nu}{du}du = -\int_{u_0}^{u_1}\frac{d}{du}\left[\frac{g_{\alpha\nu}}{(ds/du)}\frac{dx^\alpha}{du}\right]\delta x^\nu du,$$

$$0 = \int_{u_0}^{u_1} \delta x^\nu \left[\frac{1}{2(ds/du)}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} - \frac{d}{du}\left(\frac{g_{\alpha\nu}}{(ds/du)}\frac{dx^\alpha}{du}\right)\right]du.$$

On en déduit l'équation de la géodésique

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g_{\alpha\nu}}{(ds/du)}\frac{dx^\alpha}{du}\right) - \frac{1}{2(ds/du)}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} = 0.$$

On peut prendre en qualité de paramètre $s = u$, à condition que s soit différent de zéro. On obtient alors

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

ou

$$g_{\alpha\nu}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

$$g_{\alpha\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Introduisons la notation

$$\Gamma_{\alpha\nu\beta} = \Gamma_{\beta\nu\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right).$$

Avec ces notations

$$g^{\varkappa\nu} \setminus g_{\alpha\nu}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\nu\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

$$g^{\varkappa\nu}g_{\alpha\nu}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \delta^\varkappa_\alpha\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{d^2x^\varkappa}{ds^2}$$

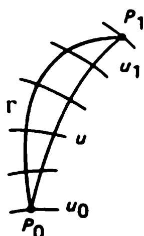


Fig. 190

et par conséquent

$$\frac{d^2x^\varkappa}{ds^2} + \Gamma^\varkappa_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

où

$$\Gamma^\varkappa_{\alpha\beta} = g^{\varkappa\nu}\Gamma_{\alpha\nu\beta}\,;$$

$\Gamma_{\alpha\nu\beta}$ et $\Gamma^\varkappa_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel.

Remarque. Les surfaces u = const coupent le champ des courbes comparables (fig. 190). Par P_0 passe $u = u_0$ et par P_1, $u = u_1$.

En prenant u pour paramètre on aura

$$\delta\int_{u_0}^{u_1}\frac{ds}{du}\,du = 0.$$

Choisissons une géodésique Γ sur laquelle l'arc $s = f(u)$; on pourra alors remplacer le paramètre u par le paramètre

$$v = f(u)\,;$$

v n'aura la même signification s que sur Γ. Sur des lignes comparables v aura une signification différente. Avec ce choix de v valable uniquement sur la géodésique on aura

$$\frac{ds}{dv} = 1.$$

On utilise cette condition pour établir l'équation

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

Il s'ensuit qu'il est dénué de sens de choisir simultanément $u = s$ et $\frac{ds}{dv} = 1$ s'il s'agit de lignes comparables (Einstein).

2. Formation de tenseurs par dérivation. Soit φ une fonction invariante ; $d\varphi/ds$ sera alors également invariant ; $d\varphi$ et ds sont des invariants. Il résulte de $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} dx^\nu$ que $A_\nu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$ est un quadrivecteur covariant (gradient de φ).

Nous aurons aussi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx^\mu}{ds},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}.$$

Si nous dérivons le long d'une géodésique

$$\frac{\partial^2\varphi}{ds^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} =$$

$$\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}.$$

Mais si $\frac{d^2\varphi}{ds^2}$ est un invariant et $\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$ un tenseur,

$$D_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}$$

sera un tenseur covariant. Si on pose $A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$, on a

$$D_\nu A_\mu = A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha.$$

Nous appellerons ce tenseur *dérivée tensorielle du tenseur A_μ*. Cette règle s'applique à tout tenseur A_μ. En effet

$$\varphi = A_\mu\frac{dx^\mu}{ds}$$

est un invariant et

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + A_\mu\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\left\{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha\right\}$$

est également un invariant. Donc dans le cas général

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha,$$

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} A_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_{\alpha\nu}.$$

3. Selon la règle de dérivation des déterminants*)

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu}$$

d'où (à la place de $\sqrt{g}$ on utilisera la quantité réelle $\sqrt{-g}$)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(-g)}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \qquad (3)$$

Comme $g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu$, on a

$$g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} dg_{\mu\sigma}.$$

Par conséquent

$$dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\alpha\beta}, \quad dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}.$$

En vertu de la formule fondamentale

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x_\sigma} \right],$$

d'où

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -(g^{\mu\tau} \Gamma^\nu_{\tau\sigma} + g^{\nu\tau} \Gamma^\mu_{\tau\sigma}).$$

En portant ce résultat dans (3) on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \Gamma^\mu_{\mu\sigma}.$$

4. Quelques tenseurs fondamentaux.

1° $A_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha.$

---

*) A noter $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 1 = \delta^\nu_\nu$, $g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$.

On en déduit

$$g^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu}A_\mu) - A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu} + A_\mu g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\nu} =$$

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu} + A^\alpha\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} + A^\nu\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\nu}A^\nu =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}A^\nu).$$

C'est la *divergence* des vecteurs contravariants.

2° *Rotationnel.* $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$ est un tenseur antisymétrique. La dérivée tensorielle de l'hexavecteur (antisymétrique) est

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}A_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}A_{\alpha\nu},$$

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

3° *Divergence d'un hexavecteur.*

$$A^{\alpha\beta}_\sigma = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\varkappa}A^{\varkappa\beta} + \Gamma^\beta_{\sigma\varkappa}A^{\alpha\varkappa} \quad (A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}),$$

d'où

$$A^\alpha = A^{\alpha\beta}_\beta = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\varkappa}A^{\alpha\varkappa} + \Gamma^\alpha_{\beta\varkappa}A^{\varkappa\beta},$$

$$A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta}.$$

§ 11

1. Revenons aux équations de Maxwell. Leur forme tensorielle permet de procéder à de nouvelles généralisations. Nous allons montrer d'abord que l'on peut écrire les équations de Maxwell sous forme tensorielle. Ecrivons d'abord les équations de Maxwell sous leur forme ordinaire :

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}j_x, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z, \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0\,;$$

ϱ est la densité des charges, j_x, j_y, j_z la densité du courant **j**.

2. Notons x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées ct, x, y, z et S^0, S^1, S^2, S^3 les quantités $4\pi\varrho$, $\frac{4\pi}{c} j_x$, $\frac{4\pi}{c} j_y$, $\frac{4\pi}{c} j_z$. Considérons le tenseur contravariant antisymétrique de second ordre

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & X & Y & Z \\ -X & 0 & N & -M \\ -Y & -N & 0 & L \\ -Z & M & -L & 0 \end{pmatrix}.$$

En passant des composantes contravariantes aux composantes covariantes on obtient

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -X & -Y & -Z \\ X & 0 & N & -M \\ Y & -N & 0 & L \\ Z & M & -L & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations le système des équations de Maxwell s'écrira de la façon suivante :

$$0 + \frac{\partial F^{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x_3} = S^0,$$

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x_0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} = S^1,$$

$$\frac{\partial F^{20}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial F^{23}}{\partial x_3} = S^2,$$

$$\frac{\partial F^{30}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_2} + 0 = S^3,$$

$$0 + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{32}}{\partial x_0} + 0 + \frac{\partial F_{03}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x_2} + 0 = 0.$$

Le premier groupe d'équations représente la divergence de l'hexavecteur $F^{\mu\nu}$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = S^\mu,$$

et le second la dérivée tensorielle

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0$$

du tenseur covariant antisymétrique $F_{\mu\nu}$. La forme tensorielle des équations du champ électromagnétique montre aussitôt que les équations de Maxwell restent invariantes dans les transformations de Lorentz.

Les densités des charges et des courants S^0, S^1, S^2, S^3 se transforment comme un vecteur contravariant lors d'un changement d'observateur. Les vecteurs électrique et magnétique se transforment comme un tenseur covariant antisymétrique $\{F_{\mu\nu}\}$.

3. Afin de mieux mettre en relief le caractère tensoriel des quantités $F_{\mu\nu}$ nous allons donner une autre définition des vecteurs électromagnétiques.

Soient φ le potentiel scalaire, A_x, A_y, A_z le potentiel vecteur. L'intensité du champ électromagnétique s'exprime en termes de φ et **A** de la façon suivante :

$$L = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \qquad X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t},$$

$$M = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t},$$

$$N = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t}.$$

Définissons dans l'univers de Minkowski un vecteur à composantes covariantes $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = -A_1$, $\varphi_2 = -A_2$, $\varphi_3 = -A_3$. Le rotationnel de ce vecteur est un tenseur antisymétrique

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Le caractère tensoriel des quantités $F_{\mu\nu}$ est démontré.

§ 12

1. En théorie électromagnétique de la lumière on déduit des équations de Maxwell (système d'équations du 1er ordre) une équation du second ordre

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0.$$

On doit se demander si en mécanique du point l'équation de Hamilton-Jacobi (dans le cas où aucune force n'agit, $U = 0$)

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = m^2c^2$$

ne devrait pas être remplacée par un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

2. Considérons un espace vectoriel complexe. La métrique est donnée par la forme bilinéaire

$$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \sum g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu.$$

La matrice métrique est symétrique en diagonale :

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons le groupe de transformations linéaires laissant invariante la forme bilinéaire :

$$\xi^{1\prime} = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \quad \xi^{2\prime} = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2;$$

on obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Les vecteurs (ξ^1, ξ^2), (η^1, η^2) de cet espace seront dénommés *spineurs*.

3. Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ permet de définir les composantes covariantes du spineur à l'aide des formules

$$\eta_\mu = \sum g_{\mu\nu}\eta^\nu.$$

La forme bilinéaire fondamentale de cet espace s'écrira comme suit :

$$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \sum g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu = \xi^\mu\eta_\mu = -\xi_\nu\eta^\nu.$$

Cette forme d'écriture établit la règle de contraction de l'indice qui est la règle d'obtention des *invariants*.

Il en découle la transformation linéaire qui est contragrédiente par rapport à la transformation fondamentale :

$$\eta_1' = \delta\eta_1 - \gamma\eta_2, \quad \eta_2' = -\beta\eta_1 + \alpha\eta_2.$$

4. La quantité $a^{\nu}_{\lambda\mu\sigma}$ qui varie lors des transformations du groupe binaire de la même façon que les quantités $\xi_\lambda\eta_\mu$, $\zeta^\nu\chi_\sigma$ sera désignée sous le nom de *tenseur de spin.*

L'algèbre des spineurs est analogue à l'algèbre des tenseurs. Au spineur ξ^1, ξ^2 correspond le spineur conjugué $\bar\xi^1$, $\bar\xi^2$ $\left(\bar\xi_\mu = \sum g_{\mu\nu}\bar\xi^\nu\right)$. Par rapport à certains indices les tenseurs de spin peuvent se transformer comme des spineurs conjugués. Dans ce cas les indices seront surmontés d'un trait. Par exemple

$$a^{\bar\lambda}_{\mu\bar\nu} \sim \xi_\mu\bar\eta_\nu\bar\zeta^\lambda.$$

5. Dans un système conservatif à un degré de liberté la forme bilinéaire peut être interprétée comme un invariant de Poincaré et le spineur ξ^1, ξ^2 comme une solution particulière des équations aux variations de Poincaré écrites pour un mouvement perturbé. On sait que le groupe des transformations du mouvement est un groupe binaire.

On peut donc interpréter les quantités ξ^1, ξ^2 comme des écarts de certaines variables canoniques des systèmes conservatifs.

§ 13

1. Considérons un tenseur de spin covariant du second ordre possédant quatre composantes

$$a_{1\bar1}, \; a_{1\bar2}, \; a_{2\bar1}, \; a_{2\bar2}$$

qui, à la suite d'une transformation binaire, se transforment comme

$$\xi_1\bar\xi_1, \; \xi_1\bar\xi_2, \; \xi_2\bar\xi_1, \; \xi_2\bar\xi_2.$$

L'invariance du déterminant se démontre comme suit :

$$\begin{vmatrix} a_{1\bar1} & a_{1\bar2} \\ a_{2\bar1} & a_{2\bar2} \end{vmatrix} = a_{1\bar1}a_{2\bar2} - a_{2\bar1}a_{1\bar2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(a_{1\bar1}a^{1\bar1} + a_{2\bar2}a^{2\bar2} + a_{2\bar1}a^{2\bar1} + a_{1\bar2}a^{1\bar2}\right) = \frac{1}{2}a_{\mu\bar\nu}a^{\bar\mu\nu}.$$

2. Les quantités $a_{1\bar1}$, $a_{2\bar2}$ sont réelles et les quantités $a_{1\bar2}$, $a_{2\bar1}$ sont conjuguées complexes. On peut donc poser

$$a_{1\bar1} = ct + z, \quad a_{1\bar2} = x + iy, \quad a_{2\bar2} = ct - z, \quad a_{2\bar1} = x - iy.$$

On a :

$$a_{1\bar{1}} = a^{2\bar{2}}, \quad a_{2\bar{2}} = a^{1\bar{1}}, \quad a_{1\bar{2}} = -a^{2\bar{1}}, \quad a_{2\bar{1}} = -a^{1\bar{2}}.$$

Avec les nouvelles notations l'invariant $\frac{1}{2}\, a_{\mu\bar{\nu}} a^{\mu\bar{\nu}}$ s'écrit

$$\frac{1}{2}\, a_{\mu\bar{\nu}} a^{\mu\bar{\nu}} = \begin{vmatrix} ct + z & x + iy \\ x - iy & ct - z \end{vmatrix} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

L'invariant fondamental de l'univers de Minkowski (l'intervalle) sera un invariant du groupe binaire lorsque ct, x, y, z possèdent la signification *mécanique* de coordonnées

$$x^0 = ct = \frac{1}{2}(a_{1\bar{1}} + a_{2\bar{2}}), \qquad x^1 = x = \frac{1}{2}(a_{1\bar{2}} + a_{2\bar{1}}),$$

$$x^2 = y = -\frac{i}{2}(a_{1\bar{2}} - a_{2\bar{1}}), \quad x^3 = z = \frac{1}{2}(a_{1\bar{1}} - a_{2\bar{2}}),$$

$$x^0 = \frac{1}{2}(a^{2\bar{2}} + a^{1\bar{1}}), \qquad x^1 = -\frac{1}{2}(a^{2\bar{1}} + a^{1\bar{2}}),$$

$$x^2 = \frac{i}{2}(a^{2\bar{1}} - a^{1\bar{2}}), \qquad x^3 = \frac{1}{2}(a^{2\bar{2}} - a^{1\bar{1}}).$$

3. Cette correspondance permet de construire l'analyse spinorielle. Considérons une fonction invariante φ. On peut écrire

$$\text{inv} \equiv d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0}\, dx^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\, dx^3 =$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}\frac{1}{2}(a^{2\bar{2}} + a^{1\bar{1}}) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{1}{2}(a^{2\bar{1}} + a^{1\bar{2}}) +$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{i}{2}(a^{2\bar{1}} - a^{1\bar{2}}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{1}{2}(a^{2\bar{2}} - a^{1\bar{1}}) =$$

$$\frac{1}{2}\left[a^{1\bar{1}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) + a^{1\bar{2}}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + \right.$$

$$\left. a^{2\bar{1}}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + a^{2\bar{2}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)\right].$$

Comme cette expression est invariante pour des $a^{\mu\bar{\nu}}$ arbitraires on a un tenseur de spin $\partial_{\mu\bar{\nu}}$:

$$\partial_{1\bar{1}}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad \partial_{1\bar{2}}\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\partial_{2\bar{1}}\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \partial_{2\bar{2}}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Problème. Déterminer directement et à l'aide des fórmules de passage le tenseur de spin $\partial^{\mu\bar{\nu}}$:

$$\partial_{\mu\bar{\nu}} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \partial^{\alpha\bar{\beta}}.$$

4. En faisant correspondre au vecteur a^i le tenseur de spin $a_{\mu\bar{\nu}}$ et au vecteur $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le tenseur de spin $\partial_{\lambda\bar{\mu}}$ on démontre que

$$\frac{1}{2} \partial_{\mu\bar{\nu}} a^{\mu\bar{\nu}} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i},$$

$$\frac{1}{2} \partial_{\mu\bar{\nu}} \partial^{\mu\bar{\nu}} = \square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2};$$

$$\frac{1}{2} \partial_{\mu\bar{\nu}} \varphi \partial^{\mu\bar{\nu}} \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{c\,\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

5. A ce point de vue le principal objectif (non encore réalisé) est de déterminer la signification mécanique des spineurs dans le cas où les coordonnées ct, x, y, z gardent leur signification usuelle.

§ 14

1. Les mouvements réels perturbés font partie du groupe des transformations binaires. Il s'ensuit que l'invariant des transformations binaires *du mouvement* sera l'intégrale des équations aux variations de Poincaré.

La stabilité ne peut avoir lieu que s'il existe un certain invariant positif (corollaire du théorème de Liapounov sur la stabilité).

Considérons un exemple

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

On en tire $x = -\lambda y$, $y = \lambda x$, soit

$$\xi^1 = -\lambda \xi^2 = -\lambda \xi_1, \quad \xi^2 = \lambda \xi^1 = -\lambda \xi_2.$$

Par conséquent

$$\eta^\nu = \bar{\xi}^\nu = -\bar{\lambda} \bar{\xi}_\nu$$

et l'invariant

$$\xi_\nu \eta^\nu = -\lambda \sum_\nu \xi_\nu \bar{\xi}_\nu$$

est une fonction de signe bien déterminé. Dans ce cas il y a stabilité.

2. La condition d'existence d'un invariant quadratique $\xi_\nu \eta^\nu$ de signe

déterminé peut s'écrire

$$\eta^{\bar{\nu}} = \xi_{\nu}.$$

Comment écrire cette condition sous forme d'équations ?

On peut déduire un nouveau spineur du spineur ξ_μ à l'aide des formules

$$\partial^{\mu\bar{\nu}}\xi_\mu + \frac{i}{\lambda_0}\,\eta^{\bar{\nu}} = 0. \tag{4}$$

Si le spineur η^ν fournit un invariant $\xi_\nu\eta^\nu$ de signe déterminé, d'après (4) on aura l'équation

$$\sum_\mu \partial^{\mu\bar{\nu}}\eta^{\bar{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0}\,\eta^{\bar{\nu}} = 0.$$

Détaillons la somme :

$$\begin{aligned} \nu = 1, \quad & \partial^{1\bar{1}}\eta^{\bar{1}} + \partial^{2\bar{1}}\eta^{\bar{2}}, \\ \nu = 2, \quad & \partial^{1\bar{2}}\eta^{\bar{1}} + \partial^{2\bar{2}}\eta^{\bar{2}}. \end{aligned}$$

3. Etudions l'opérateur $\partial_{\mu\bar{\nu}}$. Nous l'avons défini en fonction de ξ_ν :

$$a_{\mu\bar{\nu}} = \xi_\mu \xi_{\bar{\nu}}.$$

En fonction de η^ν on aura

$$a_{\mu\bar{\nu}} = \xi_\mu \xi_{\bar{\nu}} = \eta^{\bar{\mu}}\eta^{\nu} = c^{\bar{\mu}\nu}.$$

Cela montre la différence entre les opérateurs (ξ) et les opérateurs (η) :

$$\partial_{\mu\bar{\nu}} = \Delta^{\bar{\mu}\nu},$$

d'où

$$\sum \partial^{\mu\bar{\nu}}\eta^{\bar{\mu}} = \sum \Delta_{\bar{\mu}\nu}\eta^{\bar{\mu}},$$

ce qui signifie que notre dernière condition écrite en termes des opérateurs (η) prend une forme simple

$$\Delta_{\nu\bar{\mu}}\eta^{\bar{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0}\,\xi_\nu = 0. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) conduisent aux équations de Dirac.

INDEX DES NOMS

INDEX DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES